Sujets Maths en Jeans

Guillaume Garnier

Sorbonne Université

02/10/2024

Table des matières

Sujet 1 : Voyage sur le pont arc-en-ciel

Voyage sur le pont arc-en-ciel

Le pont Arc-En-Ciel reliant les royaumes de l'arbre-mode d'Yggdrasill est rompu. Pour voyager entre Ásgarðr, Miðgarðr et Jotunheimr, il faut désormais porter un collier qui porte un nombre x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On dit que la *position* du voyageur est le royaume sur lequel il se trouve, et que la configuration est le couple (position, nombre porté par le collier). La configuration change selon la règle suivante.

Voyage sur le pont arc-en-ciel

En quittant Ásgarðr, le pont arc-en-ciel se rend à Miðgarðr, laissant le nombre x sur le collier inchangé sauf si $x = 1$. Si $x = 1$, le pont se rend à Jotunheimr et transforme x en 0.

Depuis Miðgarðr, si $0 < x < 0,5$, le pont se rend à Miðgarðr et transforme le nombre en $1 - 2x$. Si $0.5 \leq x \leq 1$, le pont va à Ásgarðr et transforme le nombre en $2 - 2x$. Si $x = 0$, le pont se rend à Jotunheimr et x reste inchangé.

En quittant Jotunheimr, le pont se dirige toujours vers Ásgarðr et le nombre sur le collier devient $x - x^2$.

Voyage sur le pont arc-en-ciel

Une configuration est *stable* si elle ne change pas la position et laisse le nombre sur le collier inchangé. Un parcours tel qu'après $n \geq 1$ étapes, le voyageur revient à son point d'origine avec son numéro d'origine est appelé un n-gone. Un 3-gone s'appelle un triangle et un 4-gone s'appelle un carré.

0) Trouver toutes les configurations stables.
1) Peut-on trouver des triangles ? des carrés ? des pentagones ?
2) Si $n > 0$, peut-on toujours trouver un n-gone ?

Sujet 2 : Guérir d'une épidémie

Guérir d'une épidémie ?

Sur un échiquier de taille $n \times n$, chaque case peut-être infecté (I) ou saine (S). Vous avez un remède spécial qui permet de changer le statut d'une case ainsi que ces voisines (les 4 voisines adjacents).

1) Peut-on guérir l'épidémie si il y a une seule personne malade au début ?
2) Que se passe t-il si on peut changer le statut de deux cases adjacentes (un domino) ? utiliser d'autres formes ?

Variantes : Peut-on guérir tout le monde si tout le monde est malade au début ? Si il y a deux malades ?

Sujet 3 : Partie de cache-cache

Partie de cache-cache

Un chien joue à cache cache avec son maître.

Le parc dans lequel ils jouent est un **plan** sur lequel se trouve un obstacle $\mathcal{O}$. Cet obstacle est un ensemble de points que le maître et le chien ne peuvent pas traverser.

Soient v_c et v_m deux réels positifs qui représentent la vitesse maximale du chien et du maître.

Partie de cache-cache

La partie se déroule comme il suit :

- A chaque tour, le chien choisit de se déplacer en ligne droite à une distance au plus v_c de sa précédente position. Il ne peut pas traverser l'obstacle.
- Ensuite, le maître choisit de se déplacer en ligne droite à une distance au plus v_m de sa précédente position. Il ne peut pas traverser l'obstacle.

Le chien gagne s'il arrive à voir son maître après le déplacement du maître.

Partie de cache-cache

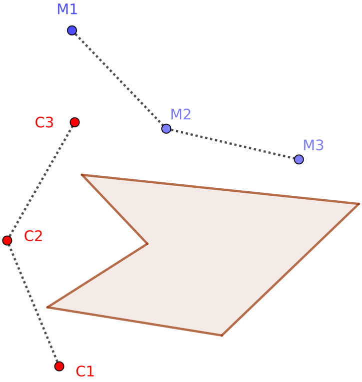

Figure – Un cache cache possible

Partie de cache-cache

Dans quels cas le chien est- il sûr de gagner ?

Partie de cache-cache

Dans quels cas le chien est- il sûr de gagner ?

Idées de questions :

- Est-ce que le chien arrive toujours à trouver son maître si l'obstacle est un point, un segment, un cercle, un polygone, etc ?
- Qu'est ce qui change si le maître ou le chien peuvent sauter par dessus l'obstacle (sans s'y arrêter ?)

Sujet 4 : Drôle de Cookies

Drôle de Cookies

Guillaume a décidé de faire des cookies aux formes mathématiques pour les goûters. Il dispose d'une poche à douille qui lui permet de déposer comme il le souhaite de la pâte à cookie dans le plan suivant un nombre fini de segments de ligne droite (le point étant accepté comme exemple de segment de longueur 0). En chaque point P de l'un de ces segments, la poche à douille permet à Guillaume de déposer de la pâte en quantité $R(P) \geq 0$ plus ou moins importante.

Drôle de Cookies

Lorsqu'elle est au four, la pâte s'étale et remplit le disque de rayon $R(P)$ centré en P pour chaque point P où Guillaume met de la pâte. La pâte de Guillaume ne se repousse pas elle même. Par exemple si le disque de centre P et de rayon $R(P)$ est contenu dans le disque de centre P' et de rayon $R(P')$, alors la pâte s'étalera en un cookie de forme le disque de centre P' et de rayon $R(P')$ uniquement. La forme du cookie après cuisson sera donc la réunion des disques de centre P et de rayon $R(P)$ où P parcourt l'ensemble des points où Guillaume a mis de la pâte. On appelle **cookie du plan**, ou plus

simplement cookie, un ensemble de points du plan telle que la pâte de Guillaume peut s'étaler pour devenir cet ensemble en suivant ce procédé.

Drôle de Cookies

La figure 2 représente deux exemples de cookies. Le cookie orange est obtenu en étalant une pâte de rayon constant égal à 1 sur un segment de longueur 1. Le cookie bleu est obtenu à partir d'un segment de pâte de rayon variable et d'un autre point de pâte.

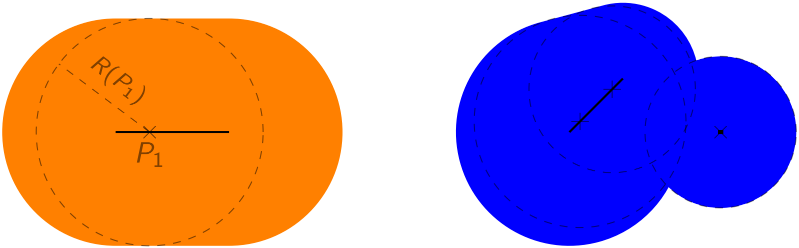

Figure – Deux exemples de cookies.

Drôle de Cookies

But : fabriquer les formes de cookie suivantes :

1. un disque de rayon R ;
2. un rectangle plein de côtés de longueurs a et b ;
3. un triangle plein de côtés de longueurs a, b et c ;
4. un anneau de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 (avec $R_2 > R_1$), les deux cercles qui constituent le bord de l'anneau étant inclus dans le cookie.