Invariants et applications ParisMaths, 2022–2023

Invariants et applications

Guillaume Garnier
https://www.guillaumegarnier.com

Boite à Outils :

- ▷ Invariants algébriques
- ▷ Invariants par coloriage
- ▷ Formule d'Euler pour les polyèdres et les graphes planaires

Références : Solutions d'expert, Arthur Engel.

1 Techniques classiques

Lorsque l'on veut résoudre des problèmes qui comportent des actions que l'on répète à chaque tour, une stratégie particulièrement utile consiste à chercher **des invariants**, autrement dit des quantités qui ne varient pas.
Dans tous les problèmes qui suivent, on se demandera donc :

— Quelle quantité ne varie pas ?

1.1 Invariant algébriques

Exercice 1.1.1. On part d'un point $I = (a, b)$ du plan, avec $0 < b < a$. On construit alors la suite de points (x_n, y_n) en appliquant la règle :

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}. \tag{1}$$

Trouver la limite des deux suites (x_n) et (y_n).

Exercice 1.1.2. Les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sont écrits sur un tableau. On s'autorise à remplacer deux nombres de même parité par $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{b+a}{2}$. En répétant suffisamment longtemps ce processus, peut-on rendre tous les nombres du tableau égaux ?

Exercice 1.1.3. On part des entiers $1, \cdots, 4n - 1$. A chaque étape, on remplace deux entiers quelconques par leur différence. Montrer qu'au bout de $4n - 2$ étapes, il restera un nombre pair.

Exercice 1.1.4. Considérons la figure suivante.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

On peut changer les signes de tous les nombres d'une ligne, d'une colonne ou d'une parallèle à une diagonale. En particulier, on peut donc changer le signe de chaque nombre de coin. Montrer qu'il restera toujours au moins un -1 sur la table quels que soient les changement opérés.

Exercice 1.1.5. On se place sur un échiquer 8×8 composé alternativement de cases noires et blanches. On considère deux situations

- On peut changer de couleur toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne
- On peut changer de couleur les cases d'un carré 2×2.

Dans chacun de ces cas, peut-obtenir un diagramme comportant une seule case noire ?

Exercice 1.1.6. On considère trois piles avec n jetons dans chacune d'elles. A chaque étape, on est autorisé à choisir deux piles, prendre un jeton de chacune des deux piles choisies, et ajouter un jeton à la troisième pile. En utilisant ces mouvements, est-il possible de finir avec un seul jeton uniquement ?

Exercice 1.1.7. Au parlement de Sikinie, chaque député a **au plus trois ennemis**. Montrer que l'on peut séparer le parlement en deux sous-parlements, de sorte que chaque député ait **au plus un ennemi** dans son propre sous-parlement.

Exercice 1.1.8. $2n$ ambassadeurs sont invités à un banquet. Chaque ambassadeur a au plus $n-1$ ennemis. Montrer qu'on peut asseoir tous les ambassadeurs autour d'une table ronde de sorte que personne ne soit assis à côté de l'un de ses ennemis.

Exercice 1.1.9. On part de l'ensemble $\{3, 4, 12\}$. A chaque étape, on choisit deux nombres a, b et on les remplace par $0.6a - 0.8b$ et $0.8a + 0.6b$.
Peut-on obtenir en un nombre fini d'étapes :

1. l'ensemble {4, 6, 12} ?
2. l'ensemble {x, y, z} où $|x-4|, |y-6|, |z-12|$ sont tous inférieus à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 1.1.10. Soient quatre entiers a, b, c, d. On suppose qu'ils ne sont pas tous égaux. En partant de (a, b, c, d) et en appliquant des itérations de la tranformation qui remplace (a, b, c, d) par $(a-b, b-c, c-d, d-a)$, montrer qu'au moins l'un des quatre nombres deviendra arbitrairement grand en valeur absolue.

Exercice 1.1.11. Pour chaque nombre de 1 à 10^6, on le remplace par la somme de ses chiffres puis celle-ci par la somme de ses chiffres, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un nombre à un chiffre. On a donc une suite une suite de 10^6 nombres à un chiffre. A-t-elle plus de 1 que de 2 ?

Exercice 1.1.12. Cinq uns et quatre zéros sont placés autour d'un cercle dans n'importe quel ordre. Ensuite, on écrit 0 entre deux nombres égaux, et 1 entre deux nombres différents. Puis on efface les nombres initiaux. Montrer qu'on n'obtient jamais neuf zéros, même en répétant ce procédé indéfiniment.

Exercice 1.1.13. Chaque nombre $a_1, \cdots, a_n$ vaut 1 ou -1, et on suppose que

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

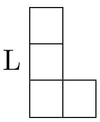
Montrer que 4 divise n.

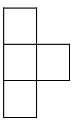
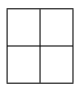
1.2 Invariant par coloriage

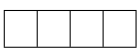
Les techniques de "coloriages" sont particulièrement utiles dans les problèmes faisant intervenir des tableaux ou des échiquiers. L'idée consiste à trouver une bonne manière de colorier le tableau afin d'obtenir une conclusion

Exercice 1.2.1. Considérons un échiquier dont on a retiré deux coins opposés. De combien de manière peut-on recouvrir les 62 cases de cet échiquier ?

Exercice 1.2.2. Un sol rectangulaire est recouvert de carreaux de taille 2×2 et 1×4. Un carreau a été cassé mais on ne dispose, pour le remplacer, que d'un carreau de l'autre sorte. Montrer qu'il est impossible de recouvrir le sol, même en réarrangeant tout le carrelage.

Exercice 1.2.3. Est-il possible de couvrir un échiquier de taille 10×10 avec des pièces en L 

Exercice 1.2.4. Montrer qu'un échiquier 8×8 ne peut pas être recouvert à l'aide de 15 tétraminos en T  et d'un tétramino carré. 

Exercice 1.2.5. Montrer qu'une grille 10×10 ne peut pas être recouverte à l'aide de 25 tétraminos droits. 

Exercice 1.2.6. Est-il possible de mettre 250 briquettes $1 \times 1 \times 4$ dans une boite $10 \times 10 \times 10$?

2 Invariant et géométrie

.

2.1 La formule d'Euler

On appelle **polyèdre** un solide dont toutes les faces sont des polygones.

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *(Formule d'Euler) Soit P un polyèdre convexe, et soient s, a, f ses nombres de sommets, d'arêtes et de faces. On a la formule :*

$$s - a + f = 2.$$

Exercice 2.1.1. Démontrer le théorème 1.

2.2 Les solides de Platon

Parmi les polyèdres, on retrouve un cas un peu spécial : celui des **polyèdres réguliers**. On dit qu'un polyèdre convexe P est régulier lorsque toutes ces faces sont des polygones réguliers ayant tous le même nombre p de côtés et le même nombre d'arêtes q en chaque sommet.

Nous allons voir qu'il existe exactement 5 polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, l'octaèdre, le cube, l'icosaèdre et le dodécaèdre.

1. Pour chacun des polyèdres cités ci-dessus, donner le nombre de faces, d'arêtes et de sommets.
2. Trouver une relation entre p, a, s et f, puis trouver une relation entre q, a, s et f.
3. Démontrer qu'il y a au plus 5 polyèdres réguliers convexes
4. Conclure