Inégalités inégales

Guillaume Garnier, Garance Henrion
https://www.guillaumegarnier.com

Boite à Outils :

- ▷ Inégalité arithmético-géométrique
- ▷ Inégalité de Cauchy–Schwarz

Quelques références utiles :

1. *Solutions d'expert*, Arthur Engel.
2. *Raisonnements divins*, Martin Aigner, Günter M. Ziegler.
3. *1000 challenges mathématiques : Algèbre*, Mohammed Aassila.
4. *Les cours de la POFM.*

1 L'inégalité arithmético-géométrique

Théorème 1.1. Pour tous réels $a, b > 0$, on a

$$\boxed{\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)}\ .$$

Exercice 1.1. Soient x, y des réels. Montrer que $x^2+y^2+1 > x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

Exercice 1.2. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels strictements positifs vérifiants $a_1 \times \cdots \times a_n = 1$. Montrer que $(1+a_1) \times \cdots \times (1+a_n) \geq 2^n$.

Exercice 1.3. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Exercice 1.4. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 1.5. Pour tous réels $a, b, c > 0$, montrer que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Exercice 1.6. Pour tous réels a, b et c, montrer que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Exercice 1.7. Pour tous réels $a, b, c > 0$, montrer que $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.

Exercice 1.8. **(Inégalité de Nesbitt)**

Pour tous $a, b, c > 0$, montrer que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}\ .$$

Exercice 1.9. Pour tous réel $a, b, c > 0$, montrer que

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}\ .$$

2 L'inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème 2.1. (Inégalité de Cauchy–Schwarz)
Soient $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des réels, alors

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) .$$

De plus, il y a égalité si et seulement s'il existe un réel C tel que

$$a_i = Cb_i \quad \text{pour tout entier} \quad 1 \leq i \leq n .$$

Exercice 2.1. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des réels positifs. Montrer que

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Exercice 2.2. Pour tous réels $a, b, c > 0$, montrer que

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Exercice 2.3. Soient a, b, c, d, e des réels tels que

$$a + b + c + d + e = 8 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16 .$$

Quelle est la valeur maximale de e ?

Exercice 2.4. Soient $x, y, z > 1$ tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Montrer que

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1} .$$

.

Exercice 2.5. Soient $x, y, z > 0$ tels que $xyz \geq xy + yz + zx$. Montrer que

$$xyz \geq 3(x + y + z) .$$

.

Exercice 2.6. Trouver la valeur minimale de $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ où $0 \leq x_i \leq 1$ et $x_1 + \cdots + x_n = 1$.