Eléments de théorie des graphes

Garance Henrion, Guillaume Garnier

Corrigés disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Boite à Outils :

- ▷ Formule d'Euler

Quelques références utiles :

1. *Solutions d'expert*, Arthur Engel.
2. *Théorie des graphes*, Pierre Bornstein
3. *Raisonnements divins*, Martin Aigner, Günter M. Ziegler
4. *1000 challenges mathématiques : Algèbre*, Mohammed Aassila

1 Visite guidée dans le jardin des graphes

Quel est le point commun entre : une carte de métro, Tiktok, un cube et une épidémie zombie ?

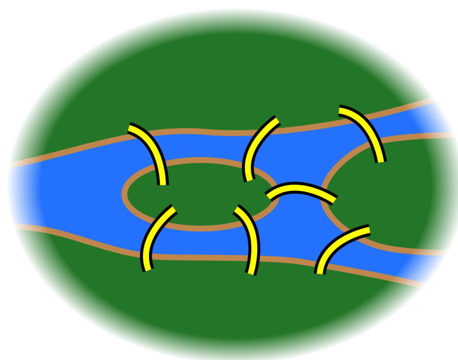

Figure 1 – Illustration du problème des sept ponts de Königsberg

La balade parfaite Prenons notre moyen de transport spatio-temporel préféré, et rendons-nous dans la ville de Königsberg du 18e siècle (actuelle Kaliningrad). Elle est séparée en une île et trois masses de terre par le fleuve Pregolia, comme le montre la figure 1.

Exercice 1.1. Est-il possible de se promener dans la ville de Königsberg et de revenir à son point de départ, en passant une seule fois sur chaque pont ?

Reprenons notre machine à voyager dans le temps et l'espace, et rendons nous rue d'Ulm, un samedi après-midi.

Exercice 1.2. Il y a 51 personnes dans un atelier Parismaths. On suppose que chacune d'entre elles a au moins un.e ami.e dans la salle – la relation "être" ami.e.s est toujours réciproque.
Montrer qu'il y a obligatoirement une personne qui a au moins deux ami.e.s dans la salle.

2 Les Graphes planaires

Un graphe **planaire** est un graphe qui peut être dessiné sur un plan sans que ses arêtes ne se coupent.

Théorème 2.1 (Formule d'Euler, 1752)**.** *Soit G un graphe planaire et connexe. Soient S, A, F ses nombres de sommets, arêtes et faces. Alors*

$$\boxed{S - A + F = 2\ .}$$

Exercice 2.1. Soit G un graphe planaire, connexe, simple, ayant au moins $S \geq 3$ sommets. Montrer que $A \leq 3S - 6$.

Exercice 2.2. Démontrer que tout graphe planaire possède un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

Exercice 2.3. Démontrer que le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

Exercice 2.4. Démontrer qu'il n'est pas possible de relier les trois maisons aux usines. Traduire cette assertion en terme de graphes.

Exercice 2.5. Dans un pays, 11 villes sont reliées deux à deux directement soit par une autoroute soit par une ligne de chemin de fer. Prouver qu'il existe forcément un pont sur lequel soit une autoroute passe au-dessus d'une autre, soit une voie de chemin de fer passe au-dessus d'une autre.

Théorème 2.2 (Kuratowski)**.** *Un graphe est planaire, si et seulement si aucun de ses sous-graphes n'est une subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

Démonstration. Admis. ■

Exercice 2.6. Montrer que la formule d'Euler est fausse lorsque l'on dessine un graphe planaire sur un donut.

3 Coloriages et dessins d'enfants

Théorème 3.1. *Tout graphe planaire G peut être colorié avec au plus 5 couleurs.*

Exercice 3.1. Montrer que parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent entre elles ou trois qui sont complètement étrangères.

Exercice 3.2. Un ensemble de 17 scientifiques échangent par mails. Les langues qu'iels utilisent sont au nombre de trois. Iels utilisent toujours la même langue avec le.a même interlocuteur.rice. Montrer qu'il y en a au moins trois qui s'écrivent les un.e.s les autres dans la même langue.

Exercice 3.3. **(Comment surveiller un musée ?)** La propriétaire d'un musée cherche à savoir quel est le nombre minimal de gardien.ne.s qu'elle doit employer pour surveiller un musée : pour cela, il faut que tous les points du musée soit visibles par l'un.e des gardien.ne.s.

— Démontrer que pour tout musée à n murs, $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ gardien.ne.s suffisent.

— Démontrer que ce nombre peut être atteint.

4 Corrigés des exercices

Solution 1.2. [énoncé]

Idée : Raisonnons par l'absurde et supposons que tout le monde a moins de deux amis. On représente les 51 personnes par 51 sommets. Si deux d'entre elles sont des ami.e.s, alors on trace une arrête entre les deux. Soit A le nombre d'arêtes. Par hyposèse, le graphe à $2r$ sommets. Mais 51 est un nombre impair donc il y a au moins une personne qui a deux ami.e.s.

Solution 2.2. [énoncé]

Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence d'un graphe planaire ayant S sommets et dont tous les sommets sont de degrés ≥ 6. Alors $6S \leq 2A$ donc $3S \leq A$ ce qui est incompatible avec le fait que $A \leq 3S - 6$ (Exo précédent).

Solution 2.3. [énoncé]

Si K_5 est planaire, alors $A \leq 3S - 6$ (il a plus de 3 sommets). Mais On a $A = 10$ et $S = 5$. Donc $3S - 6 = 9$. Contradiction !

Solution 2.4. [énoncé]

Il s'agit ici de démontrer que le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.
Raisonnons par l'absurde. Le graphe $K_{3,3}$ à 6 sommets et 9 arêtes. S'il est planaire, la formule d'Euler assure que $F = 2 - S + A = 5$.
Or, chaque face possède au moins 4 arêtes. En effet, il n'est pas possible d'avoir une face avec 3 arêtes puisqu'une arête relie toujours un sommet du bas à un sommet du haut (et pour avoir un cycle, il faut donc un nombre pair d'arêtes).
Puisque chaque arête intervient dans exactement deux faces différentes, on ne peut, avec 9 arêtes, qu'avoir au plus $\frac{9}{4} \cdot 2 = 4{,}5$ faces. ce qui permet d'avoir une contradiction.

Solution 2.5. [énoncé]

Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'aucune ligne de chemin de fer et qu'aucune autoroute de coupe une liaison de même nature. Il y a 55 liaisons. Le principe de tiroir assure qu'il existe au moins 28 liaisons de même nature ; sans perte de généralité on suppose que c'est les lignes de chemins de fer.
Soit $\mathcal{G}$ le graphe dont les sommets sont les villes et les arêtes les chemins de fer entre ces villes. Par hypothèse, $\mathcal{G}$ est un graphe planaire : il s'ensuit que $A \leq 3S - 6$. Cependant, on observe que $3S - 6 = 27 < 28 \leq A$ ce qui est exclut.

Solution 2.6. [énoncé]

Voic figure 2.

Solution 3.1. [énoncé]

On représente chaque personne par un sommet. On trace une arête bleu entre deux personnes qui se connaissent et une arête rouge entre deux personnes qui ne se connaissent pas. Soit v l'un des sommets. Parmi les 5 arêtes menant aux sommets restants on sait qu'il y en a au au moins 3 de la même couleur : par exemple rouge. (principe des tiroirs). Notons v_0, v_1 et v_2 trois de ces sommets. Considérons le triangle $v_0, v_1 v_2$. Si toutes ses arêtes sont bleu, on a gagné. Sinon, cela signifie qu'il existe une arrête rouge (par exemple $v_0 - -v_1$) et donc le triangle v, v_0, v_1 est entièrement rouge.

Solution 3.2. [énoncé]

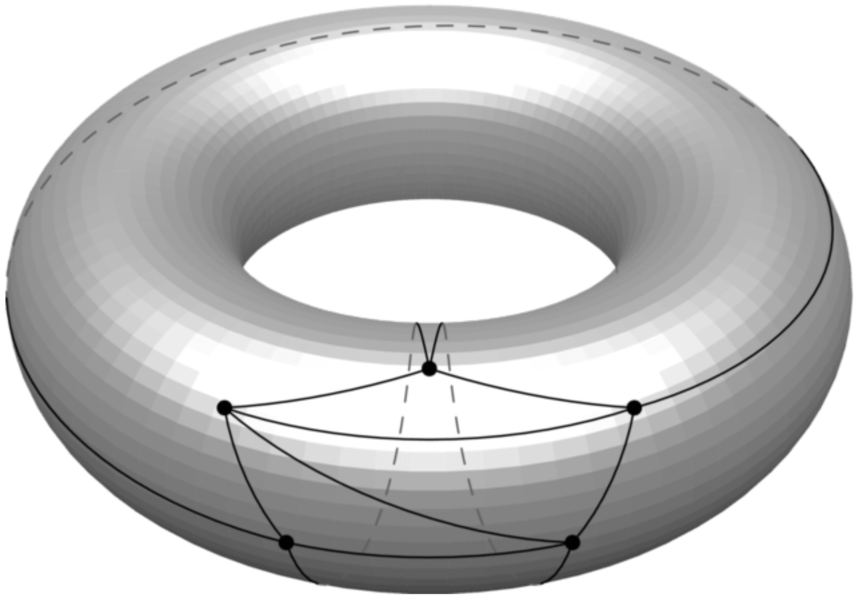

FIGURE 2 – K_5 est planaire.... sur un tore. Ici, on a $S = 5, A = 10$ et $F = 5$. On a donc $S - A + F = 0$.

Considérons le graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets représentent les scientifiques et les arêtes représentent la langue qu'iels utilisent (on supposera 3 couleurs : rouge, vert, bleu).
Soit v l'un de ces sommets. Le principe des tiroirs assure qu'il existe un ensemble de 6 sommets $(v_i)_{1 \leq i \leq 6}$ reliés à v par une arête de la même couleur c. Considérons l'ensemble des arêtes entres les sommets $(v_i)_{1 \leq i \leq 6}$

— Si l'une de ces arêtes est de la couleur c, alors on a un triangle v, v_i, v_j de la même couleur.

— Dans le cas contraire, est de nouveau dans la situation de l'exercice 3.1. Il existe donc un triangle dont toutes les arêtes ont la même couleur ayant ses sommets dans $(v_i)_{1 \leq i \leq 6}$.

Solution 3.3. [énoncé]

— Récurrence... immédiate ? Ok... il faudra un peu plus