Géométrie ParisMaths, 2022–2023

Angles en géométrie en physique

GUILLAUME GARNIER
https://www.guillaumegarnier.com

Boite à Outils :

- ▷ Chasse aux angles
- ▷ Loi de Snell-Descarte

Quelques références utiles :

1. *Solutions d'expert*, Arthur Engel.
2. *L'art de résoudre les problèmes mathématiques*, Terence Tao.
3. *Pour débuter en géométrie : chasse aux angles et éléments de géométrie du triangle*, Cécile Gachet.
4. *Algèbre et Géométrie*, Pascal Boyer ;

1 Chasse aux angles

1.1 Exercices

Exercice 1.1. Soient $\mathcal{C}$ un cercle et P un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Soient A, B deux points de $\mathcal{C}$ tels que les droites (PA) et (PB) sont deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P. Démontrer que le triangle PAB est isocèle en P.

Exercice 1.2. **(Théorème du Pôle Sud)** Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. On note S le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ (On suppose $S \neq A$). Démontrer que S est le milieu de l'arc BC.

Exercice 1.3. **(Droite de Simpson)** Soient ABC un triangle, P un point et A', B', C' les projetés orthogonaux de P sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB).
Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit à A, B et C.

Exercice 1.4. **(Australian Mathematics Competition, 1987)** Considérons un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Soit D (resp. E, F) le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{B}, \widehat{C}$) avec $\mathcal{C}$. Démontrer que les droites (AD) et (EF) sont perpendiculaires.

Exercice 1.5. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et $[BC]$ une corde de ce cercle. Soit A le milieu de l'arc BC. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux cordes de $\mathcal{C}$ passant par A et soit E, F les points d'intersections respectives de ces cordes avec $[BC]$. Montrer que les points D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice 1.6. **(Théorème de Reim)** Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles sécants en A et B ; D_A une droite passant par A et qui coupe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement en P_1 et P_2 ; et soit D_B une droite passant par B et qui coupe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement en Q_1 et Q_2. Démontrer que les droites (P_1Q_1) et (P_2Q_2) sont parallèles.

Exercice 1.7. **(Réciproque du théorème de Reim)** Soient P, Q, P', Q' des points du plan tels que les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles. Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par P et Q et coupant (PP') et (QQ') respectivement en A et B. Démontrer que P', Q', A, B sont cocycliques.

Exercice 1.8. **(Théorème de Miquel)** Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles de centres respectifs O_1, O_2 s'intersectant en X et Y. Soit A un point de $\mathcal{C}_1$ et B l'intersection de (AY) et $\mathcal{C}_2$. Démontrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 1.9. **(Théorème du pivot)** Soient ABC un triangle et soient A', B', C' trois points situés respectivement sur (BC), (AC) et (AB). Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $(AB'C')$, $(BA'C')$ et $(CA'B')$ concourent en un point M. Ce point est appelé le point de Miquel.

Exercice 1.10. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Soit d une droite coupant $\mathcal{C}_1$ en A et C et coupant $\mathcal{C}_2$ en B et D, les points étant disposés dans l'ordre A, B, C, D sur la droite. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 1.11. Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle en B.