TD Calculus

Guillaume Garnier
https://www.guillaumegarnier.com

1 Factorisation & développements

Proposition 1.1. Soient a, b et c trois nombres réels. Alors

1. $a(b+c) = ab + ac$
2. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Proposition 1.2. Soient a et b deux nombres réels. Alors

1. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Proposition 1.3. Soient a, b et c trois nombres réels. Alors

1. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Exercice 1.1. Factoriser les quantités suivantes :

1. $A = 1 + x + y + xy$
2. $B = (2x+6)(x-5) + 3x + 9$

Exercice 1.2. Soient a, b, c et d des entiers relatifs. Écrire l'expression $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ sous forme d'une somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 1.3. Soient a, b, c des entiers vérifiant $ab + bc + ca = 1$.
Montrer que le nombre $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ est un carré parfait.

Exercice 1.4. Soient a, b, c des entiers vérifiant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Montrer que le nombre

$$a^2 + b^2 + c^2$$

est un carré parfait.

Exercice 1.5. Soient a, b, c trois réels non nuls vérifiant :

$$\left(1+\frac{a}{bc}\right)\left(1+\frac{b}{ac}\right)\left(1+\frac{c}{ab}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)^2$$

Montrer que $a+b+c=1$.

Exercice 1.6. Démontrer que pour tout réels x et y on a $x^4+4y^4=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$

2 Inégalités

Proposition 2.1. Soient a, b, c trois nombres réels. On a

1. $a \leq b$ si et seulement si $a-b \leq 0$.
2. Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $a+b \geq 0$.
3. Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$.
4. Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $ac \geq bc$.

Proposition 2.2. Soient a, b, c et d des réels :

1. si $a < b$ et $c < d$, alors $a+c < b+d$.

Proposition 2.3. Soit a un réel, alors $a^2 \geq 0$.

Proposition 2.4. Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a \leq b$. Alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

Exercice 2.1. Soit un réel $x > 0$. Montrer que $x+\frac{1}{x} \geq 2$. Dans quel cas a-t'on égalité ?

Exercice 2.2. Soit deux réels $x, y > 0$. Montrer que $x+\frac{y^2}{x} \geq 2y$. Dans quel cas a-t'on égalité ?

Exercice 2.3. Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs vérifiant : $abc(a+b+c)=1$. Déterminer la valeur minimale de l'expression $(a+b)(a+c)$

Exercice 2.4. Soient deux réels a, b. Montrer que $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$

Exercice 2.5. Soient trois réels x, y, z. Montrer que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$. Dans quel cas a-t'on égalité ?

Exercice 2.6. Soient deux réels $x, y > 0$. Montrer que $10x^2+4y^2+1 \geq 6xy+2x$. Dans quel cas a-t'on égalité ?

Exercice 2.7. Soient x, y, z trois réels positifs tels que $xy+yz+zx=1$.

Démontrer que $x+y+z \geq \sqrt{3}$

3 Les différents types de raisonnement

3.1 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \implies Q$ repose sur le principe suivant :

On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \implies Q$ est vraie.

Point méthode 1 (CAT : Conduite à tenir)**.**

1. On suppose que le contraire de la conclusion est vrai.
2. On aboutit à une contradiction.
3. On en déduit que notre hypothèse de départ est fausse.
4. On conclut donc que la proposition de départ est vraie.

Exercice 3.1. (**Principe des tiroirs**) Soit n un entier naturel. Montrer que si l'on range $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, alors il y aura forcément au moins un tiroir comportant au moins deux paires de chaussettes.

Exercice 3.2. Soient deux réels $x, y > 0$. Montrer par l'absurde que si $\frac{1+y}{x} = \frac{1+x}{y}$ alors $x = y$."

Exercice 3.3. Démontrer que l'équation $3x^7 - 11x^3 + 2x - 5 = 0$ n'admet pas de solutions entières.

Exercice 3.4. Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 3.5. Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, *i.e.* qu'il ne peut pas être écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

Exercice 3.6. Soit un entier $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 3.7. Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 3.8. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si n n'est pas premier, alors n admet un diviseur inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exercice 3.9. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

3.2 Trouver le plus petit entier k tel que ...

Proposition 3.1. Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des nombres entiers naturels. Il existe un plus petit élément a_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Exercice 3.10. Trouver le plus petit entier k tel que $\frac{1}{k} \leq 0.12$.

Exercice 3.11. Trouver le plus petit entier $k > 1$ tel que k divise 15 et 25.

Exercice 3.12. Trouver le plus petit entier k non nul tel que k est divisible par 2 et 3 et 5.

Exercice 3.13. Trouver le plus petit entier k qui assure que parmi k nombres consécutifs, l'un d'entre eux est divisible par 13.