TD de Géométrie

22 février 2024

Exercice 1. (***Origine:*** **Shortlist JBMO 2001 – P11**) Soient ABC un triangle tel que $AB = AC$ et $E \in [AB]$ tel que $\widehat{ACE} = \widehat{ECB} = 18°$. Soit D le pied de la hauteur du sommet A. On suppose que $AD = 3$. Calculer CE.

Exercice 2. (***Origine:*** **JBMO 2015 – P3**) Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus). Soient (l_1) et (l_2) les droites perpendiculaires à la droite (AB) respectivement en A et en B. Les droites issues du milieu M de $[AB]$ et perpendiculaires à (AC) et (BC) coupent respectivement (l_1) et (l_2) en E et F. Si D est le point d'intersection de (EF) et (MC), montrer que

$$\widehat{ADB} = \widehat{EMF}.$$

Exercice 3. (***Origine:*** **JBMO 2013 – P2**) Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB < AC$. Soient O le centre de son cercle circonscrit ω et D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection de ω avec la droite (AD). Soit M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE], [OD]$ et $[AC]$. Prouver que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 4. (***Origine:*** **JBMO 1997 – P3**) Soient ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soient M et N les milieux respectifs des segments AB et AC. Soit K le point d'intersection des droites (BI) et (MN). Soit L le point d'intersection des droites (CI) et (MN). Démontrer que

$$AI + BI + CI > BC + KL\,.$$

Exercice 5. (***Origine:*** **Shortlist JBMO 2019 – G7**) Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit K le milieu de $[BC]$ et soit $AKLM$ un parallélogramme de centre C. On note T le point d'intersection de la droite (AC) avec la médiatrice de BM. On note ω_1 le cercle de centre C et de rayon CA et ω_2 le cercle de centre T et de rayon TM. Démontrer que l'un des points d'intersections des cercles ω_1 et ω_2 est sur la droite (LM).

Exercice 6. (***Origine:*** **JBMO 2018 – P4**) Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus). Soient A', B', C' les symétriques de A, B et C par rapport aux droites (BC), (CA) et AB. Soit A_1 le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABB' et ACC'. Soient B_1 et C_1 les points définis de manière analogue. Démontrer que les droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) sont concourantes.

Exercice 7. (***Origine:*** **JBMO 2022 – P2**) Soit ABC un triangle aigu tel que $AH = HD$, où H est l'orthocentre de ABC et $D \in (BC)$ est le pied de la hauteur du sommet A. Soit ℓ la droite passant par H et tangente au cercle circonscrit du triangle BHC. Soient S et T les points d'intersection de ℓ avec (AB) et (AC), respectivement. On note M et N les milieux de $[BH]$ et $[CH]$. Démontrer que les droites (SM) et (TN) sont parallèles.