Khôlles de théorie de la mesure

Semaine du 07/10/2024 – 1 heures – 3 groupes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. **(Ensemble de Vitali)**

Considérons la relation d'équivalence sur $[0,1]$ donnée par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. On note $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in [0,1]$ associé à cette relation d'équivalence et $\mathscr{C}$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Q°1) Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de $[0,1]$.

Pour tout $[x] \in \mathscr{C}$, on choisit un représentant $p_{[x]} \in [x]$ de manière arbitraire et on considère l'ensemble $V \coloneqq \{p_{[x]}\,;\,[x] \in \mathscr{C}\}$. (L'ensemble V est bien défini à l'aide de l'axiome du choix). Pour tout $q \in [0,1]$, on note $V + q =: \{x + q\,;\, x \in V\}$.

Q°2) Montrer que

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in [-1,1]\cap\mathbb{Q}} V + q \subset [-1,2]\ .$$

Q°3) En déduire que $V \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur une même tribu $\mathscr{T}$ de parties d'un ensemble X. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu_n(X) = 1$. Considérons l'application

$$\begin{cases} \nu : \mathscr{T} & \longrightarrow & [0,\infty] \\ \quad T & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Montrer que ν est une mesure sur $\mathscr{T}$ telle que $\nu(X) = 1$.

Exercice 3. Donner un exemple d'espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et de suite décroissante de parties $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tels que

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) \neq \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n)\ .$$

Exercice 4.

Q°1) Démontrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - n| < \frac{1}{n}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Q°2) Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$

(a) La diagonale $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.

Exercice 5. Soit (X, B, μ) un espace mesuré et $f : X \mapsto (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On suppose que $\mu(\{x \in X; f(x) > 0\}) > 0$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(x \in X; f(x) > \varepsilon) > 0$.

Exercice 6. Soit $(\mu_n)_n$ une suite croissante de mesures et soit $\mu(A) = \sup_n \mu_n(A)$. Montrer que μ est une mesure.

Exercice 7. Soit X un ensemble quelconque. Si $(\mathscr{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de tribus de X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{T}_n \subset \mathscr{T}_{n+1}$. Est-ce que $\mathscr{T} \coloneqq \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{T}_n$ est une tribu ?

Corrigés des exercices

Solution 2. [énoncé]

Point méthode 1. Pour démontrer que ν est une mesure, nous allons démontrer qu'elle vérifie l'axiomatique des mesures.

Pour commencer, on constate que

$$\nu(\emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(\emptyset)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \,.$$

ce qui assure que $\boxed{\nu(\emptyset) = 0}$.
Considérons désormais une suite de parties mesurables $(A_k)_k \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjointes. Posons $A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$. Alors :

$$\nu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_k\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_k\right)}{2^{n+1}} \,.$$

Par σ–additivité, on a

$$\nu(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_n(A_k)}{2^{n+1}} \,.$$

Comme les termes sous les signes sommes sont positifs, par échange des signes sommes (théorème de Fubini) on obtient que

$$\nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(A_k)}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(A_k)}{2^{n+1}} \,.$$

Ceci assure que

$$\boxed{\nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(A_k)} \,.$$

Solution 3. [énoncé]

Point clé 1. Ici, il faut considérer une situation où $\mu(T_0) = +\infty$, sinon il y aura égalité d'après la propriété de décroissance séquentielle des mesures.

Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ où μ_d désigne la mesure de dénombrement sur les parties de $\mathbb{N}$. Considérons la suite décroissante de parties $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par

$$T_n = [n, +\infty[\,.$$

On a $\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n = \emptyset$ donc $\mu_d\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = 0$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_d(T_n) = +\infty$. Il s'ensuit que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_d(T_n) = +\infty$ ce qui permet de conclure.

Solution 4. [énoncé]

Point clé 2. Ici, l'idée principale consiste à réécrire les différents ensembles à l'aide d'ouverts et de fermés.

Q°1) On peut réécrire $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[$. On constate que A peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ensembles mesurables. Il s'agit donc d'un borélien de $\mathbb{R}$.

Q°2) (a) L'ensemble Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, c'est donc un borélien de $\mathbb{R}^2$. (On démontre que Δ est fermé en montrant que c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue $f(x, y) = x - y$).

(b) On peut écrire B comme une intersection d'ensembles mesurables. En effet :

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

On constate que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est bien mesurable comme l'image réciproque de $\{1\}$ de la fonction continue $f(x, y) = x^2 + y^2$.
De même, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est bien mesurable : en effet, $\mathbb{Q}$ est mesurable car on peut l'écrire comme une union dénombrable de singletons. Il s'ensuit que son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est mesurable.

Solution 5. [énoncé]

Point clé 3. L'idée ici consiste à introduire l'ensemble

$$A_n \coloneqq \left\{ x \in X ; f(x) > \frac{1}{n} \right\} .$$