Contrôle Continu n°2

27 novembre 2024, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.

Le barème prend en compte la présentation de la copie et la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Encadrez les résultats et soulignez les étapes-clés des raisonnements. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontré.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. **(Théorème du cours)**

1. (Cours) Énoncer le théorème d'unicité du prolongement des mesures.
2. (Cours) Énoncer le lemme technique.
3. (Cours) Énoncer le théorème de convergence dominée et donner un contre-exemple lorsque l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée.

Exercice 2. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. Supposons que f est intégrable. Etudier la convergence de la suite
$$I_n = n \int_E \ln(1 + \frac{f}{n}) \, \mathrm{d}\mu \, .$$
lorsque $n \to \infty$.
2. Que se passe-t-il si $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \infty$?

Exercice 3. Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ que l'on munit de la mesure de Lebesgue l. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de
$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}l(x)$$

Exercice 4. Soit f une fonction intégrable sur $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), l)$ où l désigne la mesure de Lebesgue.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ est intégrable.
2. On suppose dans la suite de l'exercice que $f \geq 0$ l-p.p et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad \int_0^1 e^{nx} f(x) \, \mathrm{d}l(x) \leq M \, .$$
Montrer que $f = 0$ l-p.p.
Indication : Utiliser le théorème de convergence monotone.
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

Voir les théorèmes du cours

Solution 2. [énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = n\ln(1 + \frac{f(x)}{n})$. On veut appliquer le théorème de convergence dominée.
   Un simple DL assure que $f_n(x) \to f(x)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq |n\frac{f(x)}{n}| = |f(x)|$ qui est intégrable (et indépendante de n).

   Le théorème de convergence dominée assure que $I_n \to -\int_E f \, \mathrm{d}\mu$.
2. Considérons la fonction $f = 1$. Dans ce cas, la suite diverge vers ∞.