Contrôle Continu n°1

09 octobre 2024, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.

Le barème prend en compte la présentation de la copie et la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Encadrez les résultats et soulignez les étapes-clés des raisonnements. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. **(Question de cours – 8pts)**

1. Énoncer la définition d'une tribu $\mathscr{E}$ sur un ensemble E.
2. Décrire la plus petite et la plus grande tribu sur E. *(Sans justification)*
3. **Questions sur les séries :**
   (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel l. Démontrer que la suite $(u_{2n} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. En déduire que $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers un nombre réel.
   (d) En déduire que $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles non vides, $\mathscr{F}$ une tribu sur F et $\phi : E \to F$ une application. Démontrer que

$$\mathscr{E} := \{\phi^{-1}(A)\,;\, A \in \mathscr{F}\}$$

est une tribu sur E.

Exercice 3. L'application définie par

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{Card}(A \cap \{1, 2, \dots, N\})}{N}$$

est-elle une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$?

Exercice 4. **(Théorème de récurrence de Poincaré)** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit T une application de Ω dans Ω telle que pour tout $C \in \mathscr{A}$, l'image réciproque

$$T^{-1}(C) = \{x \in \Omega\,;\, T(x) = C\}$$

soit dans $\mathscr{A}$.
On suppose que la mesure $\mathbb{P}$ est invariante par l'application T, *i.e.* que pour tout $C \in \mathscr{A}$, on a

$$\mathbb{P}(T^{-1}(C)) = \mathbb{P}(C)$$

.
Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$A_n \coloneqq \{x \in \Omega\,;\, T^n(x) \in A\} \quad \text{et} \quad B_n \coloneqq \bigcup_{k \geq n} A_k$$

où $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n–fois) et $T^0 = Id$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n \in \mathscr{A}$ et que $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_0)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(A \cap B_0)$.
3. Soit $B \coloneqq \bigcap_{n \geq 0} B_n$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
4. Montrer que
$$B = \{x \in \Omega\,;\, T^n(x) \in A \text{ pour une infinite de } n\} \,.$$
Calculer $\mathbb{P}(B \mid A)$.
5. On dit que T est *ergodique* si $\mathbb{P}$ est invariante par T et si
$$T^{-1}(C) = C \implies (\mathbb{P}(C) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(C) = 1)$$
Montrer que dans ce cas on a $\mathbb{P}(B) = 1$, *i.e.* que l'on a presque sûrement $T^n(x) \in A$ pour une infinité de n.

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. Voir cours
2. Voir cours
3. Voir TD1

Solution 2. [énoncé]

Point méthode 1. Pour démontrer qu'un ensemble de parties sur E est une tribu, il s'agit généralement de vérifier qu'il vérifie les trois axiomes qui définissent une tribu.

Montrons que $\mathscr{E}$ vérifie l'axiomatique des tribus.

— *(Non vide)*
On sait que $\emptyset \in \mathscr{F}$. Il s'ensuit que $\emptyset = \phi^{-1}(\emptyset) \in \mathscr{E}$.

— *(Stable par passage au complémentaire)*
Soit $A \in \mathscr{E}$. Il existe un ensemble mesurable $B \in \mathscr{F}$ tel que $\phi^{-1}(B) = A$. Les propriétés classiques de la réciproque d'une fonction assurent que $\phi^{-1}(B^c) = \phi^{-1}(B)^c = A^c$. Par stabilité de $\mathscr{F}$ par passage au complémentaire, $B^c \in \mathscr{F}$. Il s'ensuit que $A^c \in \mathscr{E}$.

— *(Stable par union dénombrable)*
Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$. Par définition de $\mathscr{E}$, il existe une suite d'éléments $(B_n)_n \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \ \ \phi^{-1}(B_n) = A_n \ .$$

Posons $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{F}$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathscr{F}$. Les propriétés classiques de la réciproque d'une fonction assurent que

$$\phi^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

ce qui montre que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}$.

Il s'ensuit que $\mathscr{E}$ est une tribu sur E.

Solution 3. [énoncé]

Nous allons démontrer que μ n'est pas une mesure. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que μ est une mesure. D'une part, on observe que

$$\mu(\mathbb{N}) = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Card}(\mathbb{N} \cap \{1, 2, \dots, N\})}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N} = 1 \ .$$

D'autre part, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\{n\} = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Card}(\{n\} \cap \{1, 2, \dots, N\})}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} = 0 \ .$$

Il s'ensuit que

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{n\}\right) \overset{\text{(par } \sigma\text{-additivité)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\mu(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

C'est absurde. Donc μ n'est pas une mesure.

Solution 4. [énoncé]

1. Comme $A_n = (T^n)^{-1}(A)$, on voit par récurrence que A_n est dans $\mathscr{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en est de même pour B_n puisque $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable.
   On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$T^{-1}(B_n) = T^{-1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \bigcup_{k\geq n} T^{-1}(A_k) = \bigcup_{k\geq n} A_{k+1} = \bigcup_{k\geq n+1} A_k = B_{n+1}\ .$$
   Comme pour tout $C \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(T^{-1}(C)) = \mathbb{P}(C)$, on a
   $$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(T^{-1}(B_n)) = \mathbb{P}(B_n)\ .$$
   et donc on obtient que $\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_0)}$ par récurrence.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n \subset B_0$. Par conséquent
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B_0) - \mathbb{P}(A\cap B_n) &= \mathbb{P}\left((A\cap B_0)\setminus(A\cap B_n)\right) && \text{(car les mesures sont finies)}\\ &= \mathbb{P}\left(A\cap(B_0\setminus B_n)\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(B_0\setminus B_n\right) && \text{(par croissance des mesures)}\\ &= \mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(B_n) && \text{(car les mesures sont finies)}\\ &= 0\ .\end{aligned}$$
   Il s'ensuit que $\boxed{\mathbb{P}(A\cap B_0) = \mathbb{P}(A\cap B_n)}$.
3. On a
   $$A\cap B = A\cap(\cap_{n\geq 0}B_n) = \cap_{n\geq 0}(A\cap B_n).$$
   Comme la suite $(A\cap B_n)_n$ est décroissante et que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a
   $$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\cap_{n\geq 0}(A\cap B_n)) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A\cap B_n) = \mathbb{P}(A\cap B_0)\ .$$
   De plus, $A \subset B_0$ donc $\mathbb{P}(A\cap B_0) = \mathbb{P}(A)$, ce qui montre que $\boxed{\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)}$
4. On observe que
   $$\begin{aligned}\{x\in\Omega\,;\, T^n(x)\in A \text{ pour une infinite de } n\} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n}\{x\in\Omega\,;\,T^n(x)\in A\}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_n\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\\ &= B\ .\end{aligned}$$
   Par ailleurs, la question 3. assure que
   $$\mathbb{P}(B\mid A) \coloneqq \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1\ .$$

5. On a

$$T^{-1}(B) = T^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(B_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1}$$

La suite $(B_n)_n$ est décroissante ce qui assure que l'on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1} = B$ et donc que $T^{-1}(B) = B$. Comme T est ergodique, on a

$$\mathbb{P}(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(B) = 1 \tag{$\star$}$$

Par ailleurs, $(B \cap A) \subset B$, donc $\mathbb{P}(B \cap A) \leq \mathbb{P}(B)$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A) > 0\ .$$

En appliquant $(\star)$, on obtient que $\boxed{\mathbb{P}(B) = 1}$.