Contrôle Continu n°2

08 décembre 2023, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.

Le barème prend en compte la présentation de la copie et la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Encadrez les résultats et soulignez les étapes-clés des raisonnements. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Cadre général : On supposera toujours qu'un espace métrique (X, d) est munie de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(X)$, sauf mention contraire explicite.

Exercice 1. **(Question de cours)**

1. Énoncer le lemme *"technique"*.
2. Énoncer le théorème de convergence monotone.

Exercice 2. **(TD7 - Exo 2)** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A \in \mathscr{E}$. Pour tout $B \in \mathscr{E}$, on pose $\nu(B) = \mu(B \cap A)$.

1. Montrer que $\nu : \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ est une mesure.
2. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\mathscr{E}$–mesurable. On veut montrer que
$$\int_E f \mathrm{d}\nu = \int_A f \mathrm{d}\mu \ . \tag{1}$$
   (a) Montrer que l'équation (1) est vérifiée pour toute fonction de la forme $f = \mathbb{1}_B$ où B est un ensemble mesurable quelconque de $\mathscr{E}$.
   (b) En déduire que l'équation (1) est vérifiée pour toute fonction $\mathscr{E}$–mesurable et positive en utilisant le lemme *"technique"* et le théorème d'interversion série-intégrale positive.

Exercice 3. **(TD8 - Exo 4)** Soit $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ une mesure telle que pour tous réels $a < b$, $\mu(]a, b]) < \infty$. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mu([0, x[) & \text{si } x > 0, \\ -\mu([x, 0[) & \text{sinon .} \end{cases}$$

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Considérons l'ensemble $\mathscr{P} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Montrer que $\mathscr{P}$ est un pi–système qui engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que μ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ, que l'on précisera. *Indication : On peut vérifier que* $\mu([a, b]) = \int_{[a,b]} f'(x)\, \lambda(\mathrm{d}x)$ puis utiliser le théorème d'unicité du prolongement des mesures.

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et $f : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ une application $\mathscr{E}$–mesurable. Il existe une suite de parties mesurables $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ et une suite de réels strictement positifs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ tel que
$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \mathbb{1}_{B_n} .$$

2. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions $\mathscr{E}$–mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$ et soit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Alors
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Solution 2. [énoncé]

Voir TD7 - Exo 2

Solution 3. [énoncé]

Voir TD8 - Exo 4