Contrôle Continu n°1

13 octobre 2023, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.

Le barème prend en compte la présentation de la copie et la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Encadrez les résultats et souligner les étapes-clés des raisonnements. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants. Les questions ($\star$) sont plus difficiles : toute trace de recherche sera prise en compte dans le barème.

Exercice 1. **(Question de cours)**

1. Énoncer la définition d'une tribu $\mathscr{E}$ sur un ensemble E.
2. Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $A, B \in \mathscr{E}$. Montrer que $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
3. Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathscr{R} = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$. Donner sans justification les éléments de $\sigma(\mathscr{R})$.
4. Soit λ la mesure de Lebesgue définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Un ouvert Ω sur $\mathbb{R}$ de λ–mesure finie est-il borné ?
5. Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit E un ensemble non dénombrable. On rappellera qu'un ensemble dénombrable est un ensemble qui s'injecte dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{T}$ des parties de E qui sont dénombrables ou de complémentaire dénombrable est une tribu.
2. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mu : \mathscr{T} & \longrightarrow & [0, \infty] & \\ \quad A & \longmapsto & 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ \quad A & \longmapsto & 1 & \text{si } E \setminus A \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

   est bien définie.
3. Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathscr{T})$

Exercice 3. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \subset E$ est dite NÉGLIGEABLE par rapport à la mesure μ, s'il existe $A \in \mathscr{E}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.
On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables et $\mathscr{A} = \{A \cup N : (A, N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{N}\}$.

1. Soit $X \in \mathscr{E}$. Montrer que $X \in \mathscr{A}$ si et seulement si il existe $A, B \in \mathscr{E}$ tels que $A \subset X \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.
2. Montrer que $\mathscr{A}$ est une tribu.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4. Soit $X = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit l'application translatée

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_t : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(t+x) \end{array} \right.$$

Soit $\mathscr{A} = \{A \subset X | f \in A \implies \forall t \in \mathbb{R}\,,\, f_t \in A\}$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est une tribu.
2. ($\star$) Donner les éléments de $\mathscr{A}$ de cardinal fini.
   Information : La résolution complète de cette question n'est pas attendue par un.e étudiant.e de L3. ***Le barème prendra en compte vos pistes de recherche et vos stratégies de résolution*** *: en particulier vous pouvez conjecturer la solution, étudier des cas particuliers, etc.*

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. Une tribu est une classe de sous-ensembles $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :
   — $E \in \mathscr{E}$.
   — Si $A \in \mathscr{E}$, alors $E \setminus A \in \mathscr{E}$ (stabilité par passage au complémentaire).
   — Soient $A_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}$ (stabilité par union dénombrable).
2. Soient $A, B \in \mathscr{E}$. On remarque que $A \cup B = A \cup (B \cap (E \setminus A))$. Par ailleurs, A et $B \cap (E \setminus A)$ sont disjoints. Donc
   $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \cap (E \setminus A)) \leq \mu(A) + \mu(B).$$
   La dernière égalité est une conséquence de la croissance des mesures car $B \cap (E \setminus A) \subset B$.
3. Remarquons déjà que $\mathscr{R}$ n'est pas une tribu car elle ne contient pas E par exemple. Montrons que $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{P}(E)$. Pour cela il suffit de montrer que $\sigma(\mathscr{R})$ contient les singletons $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$. Par stabilité par union dénombrable, cela démontrera que $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{P}(E)$.
   — $\{1\}, \{3\} \in \sigma(\mathscr{R})$ car $\mathscr{R} \subset \sigma(\mathscr{R})$.
   — Montrons que $\{4\} \in \sigma(\mathscr{R})$. $\{1, 2\} \in \mathscr{R} \subset \sigma(\mathscr{R})$ et donc $\{1, 2\}^c = \{3, 4\} \in \sigma(\mathscr{R})$ par stabilité par passage au complémentaire. De plus $\{1, 3\} = \{1\} \cup \{3\} \in \sigma(\mathscr{R})$ donc $\{2, 4\} = \{1, 3\}^c \in \sigma(\mathscr{R})$. Au final $\{4\} = \{2, 4\} \cap \{3, 4\} \in \sigma(\mathscr{R})$.
   — $\{1, 3, 4\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{4\} \in \sigma(\mathscr{R})$ et donc $\{2\} = \{1, 3, 4\}^c \in \sigma(\mathscr{R})$.
4. Ceci est faux en général. Il suffit de considérer une union dénombrable d'intervalles sur $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers 0. Par exemple :
   $$O = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$
   où $I_n =]r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}[$ où les r_n sont une numérotation de $\mathbb{Q}$. O est bien ouvert par réunion quelconque d'ouverts. En particulier on a aussi $O \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Par ailleurs O est bien de mesure finie car par sous-additivité :
   $$\lambda(O) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{2^n} = 4.$$
5. On remarque que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ n'est pas stable par passage au complémentaire. En effet, $]-\infty, 0[^c = [0, +\infty[$ n'est pas ouvert. Ce n'est donc pas une tribu.

Solution 2. [énoncé]

1. Montrons que $\mathscr{T}$ vérifie l'axiomatique des tribus.
   — *(Non vide)*
   L'ensemble $\emptyset$ est dénombrable, donc $\emptyset \in \mathscr{T}$.
   — *(Stable par passage au complémentaire)*
   Soit $A \in \mathscr{T}$. Si A est dénombrable, alors $(A^c)^c = A$ ce qui assure que A^c est de complémentaire dénombrable et donc que $A^c \in \mathscr{T}$.
   Par ailleurs, si A est de complémentaire dénombrable, alors A^c est dénombrable et donc $A^c \in \mathscr{T}$.

— *(Stable par union dénombrable)*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$. On effectue une disjonction de cas.
Premier cas : Supposons que tous les $(A_n)_n$ sont dénombrables. Notons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. A est dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensemble dénombrable donc $A \in \mathscr{T}$.
Second cas : Il existe un élément A_{n_0} ($n_0 \in \mathbb{N}$) dont le complémentaire est dénombrable. Notons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors $A^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset A_{n_0}^c$. Comme toute sous partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, A^c est dénombrable.

2. Ici, il faut vérifier que pour tout $A \in \mathscr{T}$, $\mu(A)$ est bien définie, c'est à dire que $\mu(A)$ ne prend qu'une seule valeur dans $[0, \infty]$.
Pour cela, nous allons montrer que les ensembles $\{A \in \mathscr{T} : A \text{ dénombrable}\}$ et $\{A \in \mathscr{T} : E \setminus A \text{ dénombrable}\}$ forment une partition de $\mathscr{T}$.
Soit $A \in \mathscr{T}$. Par définition de $\mathscr{T}$, A est dénombrable ou de complémentaire dénombrable donc
$$\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{T} : A \text{ dénombrable}\} \cup \{A \in \mathscr{T} : E \setminus A \text{ dénombrable}\} .$$
Montrons que
$$\{A \in \mathscr{T} : A \text{ dénombrable}\} \cap \{A \in \mathscr{T} : E \setminus A \text{ dénombrable}\} = \emptyset$$
Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence de d'un ensemble
$$A \in \{A \in \mathscr{T} : A \text{ dénombrable}\} \cap \{A \in \mathscr{T} : E \setminus A \text{ dénombrable}\}$$
On observe que $E = A \cup (E \setminus A)$ ce qui assure que E est dénombrable en tant que réunion finie d'ensembles dénombrables ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé qui assure que E n'est pas dénombrable.
Il s'ensuit que pour tout $A \in \mathscr{T}$, $\mu(A)$ ne prend qu'une seule valeur dans $[0, \infty]$.
3.

Solution 3. [énoncé]

1. Supposons que $X \in \mathscr{A}$.
La définition de $\mathscr{A}$ assure l'existence d'un ensemble $A \in \mathscr{E}$ et d'un ensemble $N \in \mathscr{N}$ tels que $X = A \cup N$. Posons $B = A \cup N = X$. Alors $A \subset X \subset B$.
Comme $X = B$ est $\mathscr{E}$–mesurable, l'ensemble $B \setminus A$ est $\mathscr{E}$–mesurable et
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A^c) = \mu((A \cup N) \cap A^c) = \mu((A \cap A^c) \cup (N \cap A^c)) = \mu(N \cap A^c) .$$
Comme N est μ–négligeable, il existe un ensemble $C \in \mathscr{E}$ tel que $N \subset C$ et $\mu(C) = 0$. On observe que $N \cap A^c \subset C$. Par croissance des mesures, on a $\mu(N \cap A^c) \leq \mu(C) = 0$.
Il s'ensuit que $\mu(B \setminus A) = 0$.

Supposons qu'il existe deux ensembles $A, B \in \mathscr{E}$ tel que $A \subset X \subset B$ tel que $\mu(B \setminus A) = 0$.
On observe que
$$X = A \cup (X \setminus A)$$
Posons $N = X \setminus A$. Comme $X \subset B$, on a $(X \setminus A) \subset (B \setminus A)$ où $B \setminus A \in \mathscr{E}$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.
Il s'ensuit que $N \in \mathscr{N}$ ce qui assure que $X = A \cup N \in \mathscr{A}$.

2. Montrons que $\mathscr{A}$ vérifie l'axiomatique des tribus.
   — *(Non vide)*
   On observe que $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$. Or, $\emptyset \in \mathscr{E}$ car $\mathscr{E}$ est une tribu et $\emptyset \in \mathscr{N}$ car $\mu(\emptyset) = 0$. Donc $\emptyset \in \mathscr{A}$.
   — *(Stable par passage au complémentaire)*
   Soit $X \in \mathscr{A}$. La question précédente assure l'existence de $A, B \in \mathscr{E}$ tels que $A \subset X \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.
   On observe que $B^c \subset X^c \subset A^c$. Comme $\mathscr{E}$ est une tribu, elle est stable par passage au complémentaire et donc $A^c \in \mathscr{E}$ et $B^c \in \mathscr{E}$. De plus
   $$\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(A^c \cap B) = \mu(B \setminus A) = 0 \ .$$
   On en déduit que $X^c \in \mathscr{A}$.
   — *(Stable par union dénombrable)*
   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$. Posons $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
   La définition de $\mathscr{A}$ assure qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{E}$ et $B_n \in \mathscr{N}$ tel que $X_n = A_n \cup B_n$.
   Il s'ensuit que
   $$X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \ .$$
   Il reste donc à démontrer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{E}$ et $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{N}$.
   Comme $\mathscr{E}$ est une tribu, $A \in \mathscr{E}$ puisqu'il s'agit de l'union dénombrable d'ensembles $\mathscr{E}$–mesurable.
   La définition de $\mathscr{N}$ assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C_n \in \mathscr{E}$ tel que $B_n \subset C_n$ et $\mu(C_n) = 0$. L'ensemble $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathscr{E}$ puisqu'il s'agit de réunion dénombrable d'ensembles $\mathscr{E}$–mesurables. Par ailleurs, la sous–σ–additivité de μ assure que
   $$0 \leq \mu(C) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n) = 0 \ .$$
   On a donc trouvé un ensemble $C \in \mathscr{E}$ tel que $B \subset C$ et $\mu(C) = 0$ ce qui assure que $B \in \mathscr{N}$.
   On peut donc conclure que $X \in \mathscr{A}$

   Il s'ensuit que $\mathscr{A}$ est une tribu sur E.

Solution 4. [énoncé]

1. Montrons que $\mathscr{A}$ vérifie l'axiomatique des tribus.
   — *(Non vide)*
   Il est facile de voir que $X \in \mathscr{A}$. En effet, pour toute fonction $f \in X$, f_t est encore une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire un élément de X.
   — *(Stable par passage au complémentaire)*
   Soient $A \in \mathscr{A}$ et $f \in A^c$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f_t \notin A^c$. Alors $f_t \in A$. Par définition de $\mathscr{A}$, on a $(f_t)_{-t} \in A$.
   Cependant, on peut remarquer que $(f_t)_{-t} = f$. Il s'ensuit que $f \in A$ ce qui contredit le fait que $f \in A^c$.
   Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_t \in A^c$ ce qui assure que $A^c \in \mathscr{A}$.

— *(Stable par union dénombrable)*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$. Posons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit $f \in A$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f \in A_{n_0}$. Comme $A_{n_0} \in \mathscr{A}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f_t \in A_{n_0}$. Il s'ensuit que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \ f_t \in A$$

ce qui assure que $A \in \mathscr{A}$.

Il s'ensuit que $\mathscr{A}$ est une tribu sur E.

2. Nous allons démontrer que les éléments de $\mathscr{A}$ de cardinal fini sont composés de fonctions constantes.
Soient $A \in \mathscr{A}$ un ensemble mesurable de cardinal fini $n \in \mathbb{N}$ et $f \in A$. Par définition, la famille $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ est finie. On note

$$\{f_t : t \in \mathbb{R}\} = \{f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}\}$$

où l'on choisit d'écrire par convention de noter $f_0 = f$.

Considérons les ensembles $(E_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]} = \{t \in \mathbb{R} : f_t = f_i\}_{i\in[\![0;n-1]\!]}$. Ils forment une partition de $\mathbb{R}$.

— **Montrons que $(E_0, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$:**
On remarque que $0 \in E_0$. Soient $s, t \in E_0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{t-s}(x) = f(x + t - s) = f_t(x - s) = f(x - s) = f_{-s}(x)$$

Il reste donc à démontrer que $f_{-s} = f$. Comme $s \in E_0$, pour on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f(x - s) = f_s(x - s)$$

ce qui assure que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f(x - s) = f(x - s + s) = f(x)$$

et donc que $f = f_{-s}$. Il s'ensuit que $(E_0, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Afin de conclure la démonstration, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1. *Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$ et pour tout $t \in E_i$, $E_i = \{t\} + E_0$.*

Démonstration. Soient $i \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in E_i$.
Soit $s \in E_i$. Alors $f_s = f_i$. Posons $r = s - t$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f_{s-t}(x) = f(s - t + x) = f_i(x - t)$$

Or, comme $t \in E_i$, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f_i(x - t) = f_t(x - t) = f(x - t + t) = f(x)\ .$$

Il s'ensuit que $f_{s-t} = f$ ce qui montre que $r \in E_0$. Ceci assure que $s = t + r \in \{t\} + E_0$. In fine on a montré que $\boxed{E_i \subset \{t\} + E_0}$.

Réciproquement, soit $s = t + r \in \{t\} + E_0$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ f_s(x) = f(x + s) = f(x + t + r) = f_r(x + t) = f(x + t) = f_t(x) = f_i(x).$$

Il s'ensuit que $s \in E_i$ ce qui assure que $\boxed{\{t\} + E_0 \subset E_i}$. ■

— **Montrons qu'on peut munir l'ensemble $\{E_0, \cdots, E_{n-1}\}$ d'une structure de groupe à partir de la loi $\star$ définie par** $E_i \star E_j = \{t + s : t \in E_i, s \in E_j\}$

On admet ici que la loi $\star$ est bien définie.

Montrons que la loi de composition $\star$ munie $\{E_0, \cdots, E_{n-1}\}$ d'une structure de groupe.
Le lemme 1 assure que E_0 est un élément neutre pour la loi $\star$.
Cette loi est bien associative par associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$.
Reste à voir si chaque élément possède un symétrique. Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Soit $t \in E_i$. Comme les $(E_i)_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ forment une partition de $\mathbb{R}$, il existe $j \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $-t \in E_j$. Par définition $0 \in E_i \star E_j$. Le lemme 1 assure que $E_i \star E_j = \{0\} + E_0 = E_0$, ce qui assure que E_j est le symétrique de E_i.

On remarque que $\left((E_i)_{i \in [\![0;n-1]\!]}, \star\right)$ est un groupe fini d'ordre n. Le théorème de Lagrange assure que l'ordre de tout élément divise celui du groupe. Il s'ensuit que $nE_i = E_0$ pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$.

Comme les $(E_i)_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ forment une partition de $\mathbb{R}$, on obtient que $n\mathbb{R} = E_0$ ce qui assure que $\mathbb{R} = E_0$. Il s'ensuit que f est une fonction constante.