Contrôle Continu n°3

14 décembre 2022, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.
Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Encadrez les résultats et souligner les étapes-clés des raisonnements.
Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. **(Théorème du cours)**

1. (Cours) Énoncer le théorème d'unicité du prolongement des mesures.
2. (Cours) Énoncer le lemme technique.
3. (Cours) Énoncer le théorème de convergence dominée.
4. (Cours) Énoncer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.

Exercice 2. Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f(x) = \frac{\ln(1/x)}{1-x}$.

1. Montrer que f est $(\mathcal{B}(]0,1[), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–mesurable. Quel est le signe de f ? Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. Tracer le graphe de f.
2. Soit $x \in [0,1[$. Démontrer que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(1/x) dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.
4. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1/x)}{1-x} dx$ est bien définie. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1/x)}{1-x} dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} \ .$$

Exercice 3. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $a \neq 0$. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est une application bijective et continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction réciproque.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $a \neq 0$. On note μ la mesure image par $\varphi_{a,b}$ de la mesure de Lebesgue λ et on note ν la mesure $|a|\mu$.
   (a) Pour tous réels $c \leq d$, montrer que $\varphi_{a,b}^{-1}(]c,d])$ est un intervalle que l'on précisera.
   (b) Calculer $\nu(]c,d])$.
   (c) En déduire que $\nu = \lambda$ et montrer que $\mu = |a|^{-1}\lambda$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $a \neq 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ une fonction mesurable. Montrer que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\lambda(dx)$ est bien définie et montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\lambda(dx) = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) \ .$$

Exercice 4. **(Inégalités de Hölder et de Minkowski)** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit $b \in]0,1[$. Montrer que, pour tous $s, t \in]0, \infty[$, on a
$$s^b t^{1-b} \leq bs + (1-b)t\ .$$
Indication : On pourra utiliser la concavité du logarithme.
2. Soient p et q deux exposants conjugés. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ deux v.a. positives $\mathcal{F}$–mesurables. Montrer que
$$\mathbb{E}[XY] \leq \left(\mathbb{E}[X^p]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}[Y^q]\right)^{\frac{1}{q}}\ .$$
3. Soit $p \geq 1$. Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ deux v.a. positives $\mathcal{F}$–mesurables. Montrer que
$$\left(\mathbb{E}[(X+Y)^p]\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}[X^p]\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbb{E}[Y^p]\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

Voir les théorèmes du cours

Solution 2. [énoncé]

Voir le TD 7, Exercice 8.

Solution 3. [énoncé]

Voir le TD 8, Exercice 3.

Solution 4. [énoncé]

Voir le TD 8, Exercice 15.