Contrôle Continu n°2

16 novembre 2022, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.
Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique.
Encadrez les résultats et souligner les étapes-clés des raisonnements.
Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

1. (Cours) Rappeler la définition d'une application mesurable.
2. (Cours) Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est mesurable.

Exercice 2.

Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont mesurables.
   (a) La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.
   (b) La dérivé f' d'une fonction mesurable f.
   (c) La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 0, \\ e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
   (d) Sans utiliser la question (2.b), démontrer que l'application partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est mesurable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
   (a) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un intervalle.
   (b) En déduire que f est mesurable.

Exercice 3.

Soient $(E, \mathscr{E})$ et $(F, \mathscr{F})$ deux ensembles mesurables. Décrire l'ensemble des fonctions mesurables lorsque

1. $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(F)$.
2. $\mathscr{E} = (E, \emptyset)$ et $\mathscr{F} = (F, \emptyset)$.
3. $\mathscr{E} = (E, \emptyset)$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(F)$.
4. $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{F} = (F, \emptyset)$.

Exercice 4.

Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable. Soient $a > 0$ et $f_a : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < a, \\ a & \text{si } f(x) \geq a, \\ -a & \text{si } f(x) \leq -a. \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Plus difficile ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 5. (Théorème d'Egoroff) Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$ et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables réelles.

1. Montrer que l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire
$$C = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i,j\geq n} \left\{ |f_i - f_j| \leq \frac{1}{k} \right\}$$
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-pp. vers une fonction mesurable f, *i.e.* $\mu(C^c) = 0$. On définit pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $A_n^k = \bigcup_{p=1}^n \bigcap_{i,j\geq p} \left\{ |f_i - f_j| \leq \frac{1}{k} \right\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu((A_{n_{k,\varepsilon}})^c) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
3. En déduire le théorème d'Egoroff : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A_\varepsilon^c) < \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A_ε.
4. L'hypothèse μ finie est-elle indispensable ?

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. Soient $(E, \mathscr{E})$ et $(F, \mathscr{F})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E \to F$ est dite $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$–mesurable si pour tout $B \in \mathscr{F}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{E}$.
2. La continuité de f assure que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f < a\}$ est un ouvert. Comme la tribu de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{f < a\}$ est mesurable. Cela suffit à conclure !

Solution 2. [énoncé]

1. (a) $\mathbb{Q}$ borélien car dénombrable. Sa fonction indicatrice est donc mesurable.
   (b) Vu en TD.
   (c) Considérons les fonctions $g : x \mapsto x + 2$ et $h : x \mapsto e^x$. Ces fonctions sont continues et donc mesurables.
   Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(A) = \Big(h^{-1}(A) \cap]-\infty, 0)\Big) \cup \Big(g^{-1}(A) \cap]0, +\infty)\Big)$. Il s'ensuit que $f^{-1}(A)$ est mesurable en tant qu'intersection et réunion de parties mesurables.
   (d) Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ une partie mesurable. On observe que $\lfloor \cdot \rfloor^{-1}(A) = \bigcup_{n \in A \cap \mathbb{Z}} [n, n+1[\in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ce qui permet de conclure.
2. (a) Quitte à considérer la fonction $-f$, nous supposons que la fonction f est croissante. Soit $c \in \mathbb{R}$. Notons $a = \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}$. Comme f est croissante, pour tout $x < a$, on a $f(x) < c$, donc $]-\infty, a[\subset f^{-1}(]-\infty, c[)$. Par ailleurs, pour tout $x > a$, on a $f(x) > c$, donc $f^{-1}(]-\infty, c[) \subset]-\infty, a]$.
   On en déduit donc que $f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a][$ ou $f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a]$.
   (b) Étant donné que les intervalles $]-\infty, c[$ $(c \in \mathbb{R})$ engendre la tribu borélienne, on en déduit que la fonction f est mesurable.

Solution 3. [énoncé]

1. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction $f : E \to F$ et pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathscr{P}(E) = \mathscr{E}$.
2. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction $f : E \to F$, on a $f^{-1}(F) = E$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
3. Seules les fonctions constantes sont mesurables.
   Si f prend au moins deux valeurs a, b dans F, alors $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(a) \neq E$, donc f n'est pas mesurable.
   Si f est constante, alors elle est mesurable. En effet, supposons que $f(x) = a$ pour tout $x \in E$.
4. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction $f : E \to F$ et pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathscr{P}(E) = \mathscr{E}$.

Solution 4. [énoncé]

Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ une partie mesurable. L'ensemble $A_a = \{y \in A : |y| < a\} = A \cap]-a, a[$ est mesurable.
On effectue une disjonction de cas :

— Si $(-a) \notin A$ et si $a \notin A$, alors $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a)$. On en déduit que $f_a^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ puisque f est mesurable.

— Si $(-a) \in A$ et si $a \notin A$, alors $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a) \cup f^{-1}(]-\infty, -a])$.

— Si $(-a) \notin A$ et si $a \in A$, alors $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a) \cup f^{-1}([a, \infty[)$.

— Si $(-a) \in A$ et si $a \in A$, alors $f_a^{-1}(A) = f^{-1}(A_a) \cup f^{-1}([a, \infty[) \cup f^{-1}(]-\infty, -a])$.

Solution 5. [énoncé]

1. Notons C l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $x \in C$. La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc c'est une suite de Cauchy. On en déduit que
$$\forall k > 0, \exists n_k \in \mathbb{N} : \forall i, j > n_k, |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k},$$
et donc que
$$C \subset \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i,j\geq n} \left\{|f_i - f_j| \leq \frac{1}{k}\right\}$$
On montre l'autre inclusion de manière réciproque.
2. On considère pour $p, k \geq 1$ les ensembles $B_p^k = \bigcap_{i,j\geq p} \left\{|f_i - f_j| \leq \frac{1}{k}\right\}$. Comme la suite $(B_p^k)_k$ est croissante pour l'inclusion, on a
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^k) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n^k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n^k).$$
Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-pp. vers une fonction mesurable f, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n^k) = \mu(E).$$
Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_k tel que $\mu(A_{n_k,\varepsilon}) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2^k}$, ce qui assure que $\mu((A_{n_k,\varepsilon})^c) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
3. Il suffit de prendre $A_\varepsilon^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{n_k,\varepsilon})^c$.
4. Oui ! Indication : considérer la suite de fonctions $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$.