Contrôle Continu n°1

07 octobre 2022, 45 minutes

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.
Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique.
Encadrez les résultats et souligner les étapes-clés des raisonnements.
Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

1. (Cours) Rappeler la définition d'une tribu sur un ensemble E.
2. (Cours) Rappeler la définition d'une mesure positive sur un espace mesurable $(E, \mathscr{A})$.
3. (Cours) Rappeler la définition de l'ensemble des atomes d'une mesure. Quels sont les atomes de la mesure de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}$? de la mesure de dénombrement $\#$ sur $\mathbb{Z}$? de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$?
4. Soit λ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'une partie compacte K de $\mathbb{R}$ a une λ–mesure finie.
   (b) Une partie U mesurable de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide est-elle forcément λ–négligeable ?
   (c) Un ouvert O de $\mathbb{R}$ de λ–mesure finie est-il forcément borné ?

Exercice 2. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure de probabilité.

On note $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$. Démontrer que $\mathscr{T}$ est une tribu sur E.

Exercice 3. Soit $\mathscr{A}$ la tribu sur $\mathbb{Z}$ engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Déterminer $\mathscr{A}$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}))$, finie et invariante par translation, *i.e.* que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $A \subset \mathbb{Z}$, on a $\mu(A) = \mu(\{n\} + A)$.

Exercice 5. (Nombres diophantiens)

Soit $\tau > 2$. On dit qu'un irrationnel $x \in [0,1]$ est τ-diophantien dans $[0,1]$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^\tau}.$$

En un sens, on peut dire que les nombres τ-diophantiens sont des irrationnels "mal approchés" par des rationnels. On note D_τ l'ensemble des réels τ–diophantiens de $[0,1]$.
Aussi, on note λ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

1. Soient $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq^\tau}\right\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Calculer $\lambda\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble

$$A_n = \Big\{x \in [0,1] : \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\}$$

Montrer que A_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.
Indication : On remarquera que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$A_n = \bigcup_{q\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{0\leq p\leq q} \Big\{x \in [0,1] : \Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{nq^\tau}\Big\}$$

3. En déduire que $\lambda(D_\tau) = 1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin (2 points) ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 6. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties $\mathscr{A}$–mesurables de E. Démontrer qu'on a l'inégalité :

$$\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$$

On rappelle que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k$.

Exercice 7. On note λ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, a-t'on $\lambda(\overline{O}\backslash O) = 0$? ($\overline{O}$ désigne l'adhérence de O)

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. On dit qu'une famille $\mathscr{A}$ de parties de E est une tribu de E si elle vérifie les conditions suivantes :
   (i) $\emptyset \in \mathscr{A}$,
   (ii) Si $A \in \mathscr{A}$, alors $\complement_E A \in \mathscr{A}$,
   (iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.
2. On dit qu'une application $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ est une mesure positive sur $(E, \mathscr{A})$ si elle vérifie les conditions suivantes :
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
   (b) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{A}$, alors
   $$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$
3. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'ensemble des atomes de μ est défini par
   $$\mathrm{Ato}(\mu) = \{x \in E : \mu(\{x\}) > 0\}$$
   — Pour la mesure de Dirac δ_0, on a $\mathrm{Ato}(\delta_0) = \{0\}$.
   — Pour la mesure de dénombrement $\#$, on a $\mathrm{Ato}(\#) = \mathbb{Z}$.
   — Pour la mesure de Lebesgue λ, on a $\mathrm{Ato}(\lambda) = \emptyset$.
4. (a) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On sait alors que K est une partie **fermée** et **bornée** de $\mathbb{R}$.
   — Comme c'est une partie fermée, K est le complémentaire d'un ouvert et donc c'est une partie mesurable de $\mathbb{R}$.
   — Par ailleurs, comme c'est une K est borné, il existe un intervalle $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ tel que $K \subset]a, b[$. Par croissance des mesures, on a $\lambda(K) \leq \lambda(]a, b[)$. On en déduit que $\lambda(K) \leq b - a < \infty$.
   (b) Non ! En effet, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide, pourtant $\lambda(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \infty$.
   (c) Considérons la réunion d'intervalles ouverts
   $$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]n, n + \frac{1}{n^2}[$$
   La σ–sous–additivité de λ nous permet d'écrire que
   $$\lambda(A) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]n, n + \frac{1}{n^2}[) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda(]n, n + \frac{1}{n^2}[) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
   Comme A est une partie ouverte et non bornée, cela permet de conclure.

Solution 2. [énoncé]

Démontrons que $\mathscr{T}$ vérifie l'axiomatique des tribus.

(i) Comme μ est une mesure, on sait que $\mu(\emptyset) = 0$. On en déduit que $\emptyset \in \mathscr{T}$.

(ii) Montrons que $\mathscr{T}$ est stable par passage au complémentaire. Étant donné que μ est une mesure de probabilité, nous avons $\mu(E) = 1 < \infty$. Pour toute partie mesurable $A \subset \mathscr{A}$, on observe donc

$$\mu(E \backslash A) = \mu(E) - \mu(A).$$

En particulier, si $A \in \mathscr{T}$, on obtient que

$$\begin{cases} \mu(E\backslash A) = 0 & \text{quand} \quad \mu(A) = 1 \\ \mu(E\backslash A) = 1 & \text{quand} \quad \mu(A) = 0 \end{cases}$$

ce qui assure que $E\backslash A \in \mathscr{T}$.

(iii) Montrons que $\mathscr{T}$ est stable par union dénombrable. Donnons nous une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$. Dans un premier temps, supposons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu(A_n) = 0$. Par σ–sous–additivité de μ, on observe que

$$0 \leq \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0.$$

Il s'ensuit que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$, ce qui montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.
Maintenant, supposons qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) = 1$. On a

$$A_{n_0} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset E.$$

Par la propriété de croissance des mesures, on a

$$1 = \mu(A_{n_0}) \subset \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \subset \mu(E) = 1.$$

On en déduit que $\mathscr{T}$ est une tribu.

Solution 3. [énoncé]

On constate que les singletons sont des éléments de $\mathscr{A}$. En effet, pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $S_{n-2} \cap S_n = \{n\}$. Donc $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.

Solution 4. [énoncé]

Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une telle mesure $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to [0, \infty]$.

Nous allons commencer par montrer qu'il existe au moins un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$. Dans le cas contraire, on aurait que $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mu(n) = 0$. Étant donné que la mesure μ est σ–additivite, on a

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

Il s'ensuit que μ est la mesure nulle, ce qui est contredit les hypothèses de l'énoncé. On a donc montré qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$.

De plus, on sait que μ est une mesure invariante par translation. On en déduit que

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{n\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\tau_{n-n_0}(\{n_0\})) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n_0\}) = \infty.$$

Ceci contredit le fait que μ est une mesure finie.

Solution 5. [énoncé]

1. (a) Soient $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On observe

$$\Big\{x\in\mathbb{R} : \Big|x-\frac{p}{q}\Big| \le \frac{1}{nq^\tau}\Big\} = \Big[\frac{p}{q}-\frac{1}{nq^\tau}, \frac{p}{q}+\frac{1}{nq^\tau}\Big] .$$

   C'est un intervalle fermé, et donc un élément de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

   (b) Par définition de la mesure de Lebesgue, on a

$$\lambda\Big(\Big\{x\in\mathbb{R} : \Big|x-\frac{p}{q}\Big| \le \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big) = \lambda\Big(\Big]\frac{p}{q}-\frac{1}{nq^\tau}, \frac{p}{q}+\frac{1}{nq^\tau}\Big[\Big) = \frac{2}{nq^\tau}.$$

2. — Par conséquent, A_n s'écrit comme une union dénombrable de parties mesurables, ce qui montre que A est mesurable.
   — Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La σ–sous–additivité de λ nous assure que

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{0\le p\le q}\Big\{x\in[0,1] : \Big|x-\frac{p}{q}\Big| \le \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big)\\ &\le \sum_{q\in\mathbb{N}^*}\sum_{0\le p\le q}\lambda\Big(\Big\{x\in[0,1] : \Big|x-\frac{p}{q}\Big| \le \frac{1}{nq^\tau}\Big\}\Big)\\ &= \sum_{q\in\mathbb{N}^*}\sum_{0\le p\le q}\frac{2}{nq^\tau}\\ &= \frac{2}{n}\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{q+1}{q^\tau}\end{aligned}$$

   Lorsque $q\to\infty$, $\frac{q+1}{q^\tau}\sim\frac{1}{q^{\tau-1}}$. Comme $\tau>2$, par comparaison avec les série de Riemann, on en déduit que $\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{q+1}{q^\tau}<\infty$.
   Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=0$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on observe que

$$A_n^c = \Big\{x\in[0,1] : \forall\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,1], \Big|x-\frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{nq^\tau}\Big\}$$

   La définition de D_τ assure donc que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n^c\subset D_\tau$. Il s'ensuit que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c \subset D_\tau \subset [0,1].$$

   Par propriété de croissance des mesures, on a

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\Big) \le \lambda(D_\tau) \le \lambda([0,1]). \tag{1}$$

De plus, on observe que

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\Big) = \lambda\Big([0,1]\setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \lambda([0,1]) - \lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big), \tag{2}$$

puisque $\lambda([0,1]) = 1 < \infty$.

Par ailleurs, on a par croissance des mesures que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ 0 \le \lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) \le \lambda(A_k)$$

ce qui permet de conclure par passage à la limite en k que $\lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = 0$. En utilisant l'équation (2), on montre donc que $\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c\Big) = 1$.

En utilisant les inégalités (1), on montre que $\lambda(D_\tau) = 1$.

Solution 6. [énoncé]

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on note $A_n = \bigcap_{m\ge n} E_m$. On observe que

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\ge n} E_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Étant donné que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la croissance séquentielle de μ assure que

$$\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3}$$

Par ailleurs, pour tous entier $k\ge n$, nous observons que $A_n\subset T_k$. Il s'ensuit que

$$\mu(A_n) \le \inf_{k\ge n} \mu(E_k).$$

En passant à la borne supérieure sur tous les entiers n de chaque côté de cette inégalité, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\ge 0} \mu(A_n) \le \sup_{n\ge 0}\inf_{k\ge n} \mu(E_k) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_k). \tag{4}$$

On conclut en utilisant (3) et (4)

Solution 7. [énoncé]

Non ! Pour le démontrer, nous allons construire un ouvert O dense dans $\mathbb{R}$ et de λ–mesure finie.

On sait que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on peut donc se donner une énumération $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$. Considérons l'ensemble

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2}[.$$

C'est un ouvert de $\mathbb{R}$ étant donné qu'il peut s'écrire comme une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
De plus, il est dense dans $\mathbb{R}$ étant donné qu'il contient $\mathbb{Q}$.
On montre aussi qu'il est de mesure finie. En effet, la σ–sous–additivité de λ assure que

$$\lambda(O) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\Big(]q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2}[\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

On a donc construit un ouvert qui vérifie les propriétés voulues.

Supposons maintenant que $\lambda(\overline{O}\backslash O) = 0$. Comme O est dense dans $\mathbb{R}$, on a $\lambda(\overline{O}\backslash O) = \lambda(\mathbb{R}\backslash O)$. Il s'ensuit par σ–additivité de λ que

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda((\mathbb{R}\backslash O) \cup O) = \lambda(\mathbb{R}\backslash O) + \lambda(O) = \frac{\pi^2}{3}.$$

ce qui est absurde.