

Contrôle Continu n°2

11 avril 2023, 45 minutes

Corrigé disponible sur <https://www.guillaumegarnier.com>

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.

Le barème prend en compte la présentation de la copie et la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Encadrez les résultats et soulignez les étapes-clés des raisonnements. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. (Théorème de représentation de Riesz–Fisher)

Soit E l'espace préhilbertien des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = 0$$

muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$.

1. Énoncer le lemme de représentation de Riesz–Fisher.
2. Montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E .
3. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $a \in E$ tel que, pour tout $u \in E$, on ait $\varphi(u) = \langle u, a \rangle$.
4. En déduire que E n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 2. (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit H un espace préhilbertien.

1. Donner la définition de base hilbertienne de H .
2. Rappeler brièvement à quoi sert le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et expliquer son déroulement. Ici, un dessin précis pourra servir de justification.
3. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 P(i)Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 3. (Théorème de projection orthogonale sur une partie convexe et fermée)

Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subset H$ une partie convexe, fermée et non vide.

1. Énoncer l'identité du parallélogramme.
2. Soit $x \in \mathcal{H}$. Pour tout $n \geq 1$, montrer qu'il existe $z_n \in C$ tel que

$$\|x - z_n\|^2 \leq d(x, C)^2 + \frac{1}{n}.$$

3. En déduire l'existence d'un élément $z \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - z\|$.
Indication : On pourra démontrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
4. Montrer que cet élément z est unique. On dit que $z = P_C(x)$ est la projection orthogonale de x sur C .
5. Montrer que

$$\forall y \in C, \Re \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0.$$

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

1. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Pour toute application $\varphi \in \mathcal{H}^*$, il existe un unique $a \in \mathcal{H}$ tel que

$$\boxed{\varphi(x) = \langle x, a \rangle} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\varphi\| = \|a\|}.$$

2. Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\varphi(u + \lambda v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda v_n}{n} = \varphi(u) + \lambda \varphi(v),$$

ce qui assure que φ est une forme linéaire. De plus, l'inégalité de Cauchy–Schwarz assure que

$$|\varphi(u)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2} \times \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_2.$$

ce qui assure que l'application φ est continue.

3. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un tel élément $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de l^2 . On a

$$a_n = \langle e_n, a \rangle = \varphi(e_n) = \frac{1}{n}.$$

Cependant cette suite n'est pas dans E , donc un tel a n'existe pas.

4. E n'est pas complet, sinon le théorème de représentation de Riesz assurerait l'existence d'un élément $a \in E$ comme défini dans la question précédente. Il s'ensuit que E n'est pas un espace de Hilbert.

Solution 2. [énoncé]

1. Une base hilbertienne est une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormée de H telle $\text{Vect}(e_n; n \in \mathbb{N})$ est dense dans H .
2. cf. cours et TD.
3. La linéarité de la somme assure que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique par définition. Il reste donc à voir qu'elle est définie positive.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\langle P, P \rangle = 0 \iff \sum_{i=0}^2 P(i)^2 = 0 \iff P(0) = P(1) = P(2) = 0 \iff P = 0.$$

L'implication $P(0) = P(1) = P(2) = 0 \implies P = 0$ vient du fait que P est un polynôme de degré 2 avec trois racines distinctes.

4. On déroule ici procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[2]$.

- Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle 1, 1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Considérons le vecteur $u_2 = X - \langle e_1, X \rangle e_1 = X - 1$. On a :

$$\|u\|^2 = \sum_{i=0}^2 (i-1)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2.$$

On pose donc

$$e_2 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$$

- Considérons le vecteur

$$\begin{aligned} u_3 &= X^2 - \langle e_1, X^2 \rangle e_1 - \langle e_2, X^2 \rangle e_2 \\ &= X^2 - 2X + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On a $\|u_3\|^2 = \frac{2}{3}$

On pose donc $e_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}(X^2 - 2X + \frac{1}{3})$.

Par construction, la famille (e_1, e_2, e_3) convient.

Solution 3. [énoncé]

1. Soient E un espace préhilbertien, a et b deux éléments de E . On a

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$$

2. Soit $x \in H$. Par définition, $d(x, C)^2 = \inf_{z \in C} d(x, z)^2$.

Par définition de l'infimum,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z_\varepsilon \in C : d(x, C)^2 \leq d(x, z_\varepsilon)^2 < d(x, C)^2 + \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall n \geq 1, \exists z_n \in C : d(x, C)^2 \leq d(x, z_n)^2 < d(x, C)^2 + \frac{1}{n}.$$

Par construction, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.

3. Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. L'identité du parallélogramme assure que

$$\left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{z_n - z_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2).$$

Puisque C est une partie convexe et que $(z_n, z_m) \in C^2$, on a $\frac{z_n + z_m}{2} \in C$.

Il s'ensuit que $\left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\| \geq d(x, C)$ ce qui assure que

$$\left\| \frac{z_n - z_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (d(x, z_n)^2 + d(x, z_m)^2) - d(x, C)^2.$$

Il s'ensuit que $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|z_n - z_m\| = 0$ ce qui assure que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme H est un espace complet, il existe $z \in H$ tel que $\lim_{n \in \mathbb{N}} z_n = z$. De plus C est une partie fermée, ce qui assure que $z \in C$.

4. Supposons qu'il existe $z \neq z'$ tels que $d(x, C) = \|x - z\| = \|x - z'\|$. Puisque C est une partie convexe, il s'ensuit que $\frac{z+z'}{2} \in C$.

L'identité du parallélogramme assure que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z+z'}{2} - x \right\|^2 &= \left\| \frac{z-x}{2} + \frac{z'-x}{2} \right\|^2 \\ &= 2 \left\| \frac{z-x}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{z'-x}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{z-x}{2} - \frac{z'-x}{2} \right\|^2 \\ &= d(x, C)^2 - \left\| \frac{z-z'}{2} \right\|^2 \\ &< d(x, C)^2 \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $d(x, C)^2 \leq \left\| \frac{z+z'}{2} - x \right\|^2$.

5. Soit $y \in C$. Par convexité de C , pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $(1-\lambda)y + \lambda P_C(x) \in C$. On voit que

$$\begin{aligned} \|x - [(1-\lambda)P_C(x) + \lambda y]\|^2 &= \|x - P_C(x) + \lambda(P_C(x) - y)\|^2 \\ &= \|x - P_C(x)\|^2 + \lambda^2 \|P_C(x) - y\|^2 + \lambda 2\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle. \end{aligned}$$

Par définition du projeté orthogonal, on a

$$\|x - [(1-\lambda)P_C(x) + \lambda y]\|^2 \geq d(x, C)^2 = \|x - P_C(x)\|^2.$$

Il s'ensuit que

$$\|x - P_C(x)\|^2 \leq \|x - P_C(x)\|^2 + \lambda^2 \|P_C(x) - y\|^2 + \lambda 2\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle,$$

ce qui assure que

$$0 \leq \lambda^2 \|P_C(x) - y\|^2 + \lambda 2\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle.$$

Si $\lambda \neq 0$, alors on a

$$0 \leq \lambda \|P_C(x) - y\|^2 + 2\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle.$$

ce qui montre que $\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle \geq \frac{\lambda}{2} \|P_C(x) - y\|^2$. En faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, on obtient que

$$\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle \geq 0$$

ce qui assure que

$$\Re\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$$