Contrôle Continu n°1

21 février 2023, 1 heure

Corrigé disponible sur `https://www.guillaumegarnier.com`

Les calculatrices, appareils connectés et documents sont **interdits**.
Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique.
Encadrez les résultats et soulignez les étapes-clés des raisonnements.
Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser le résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. **(Examen 2016) –** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\chi : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et identiquement nulle en dehors d'un ensemble mesurable B de mesure finie.
Soit $p \in]1, +\infty[$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} T_\chi : L^p(X, \mu) &\longrightarrow L^1(X, \mu) \\ f &\longmapsto \chi f \end{aligned}$$

est bien définie, et que c'est une application linéaire, continue, dont on calculera la norme.

Exercice 2. **(Inégalité de Sobolev) –** Dans cet exercice, on travaille avec la mesure de Lebesgue sur un intervalle non vide $[a, b] \in \mathbb{R}$.

1. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $x, y \in [a, b]$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_2 \sqrt{|x - y|} \ .$$
2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$|f(c)| \leq \frac{1}{\sqrt{|b - a|}} \|f\|_2 \ .$$
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (dépendant seulement de $|b - a|$) telle que pour toute fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:
$$\|f\|_\infty \leq C(\|f\|_2 + \|f'\|_2) \ .$$

Exercice 3. On note $E = \ell^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que $\sum |u_n| < +\infty$.

1. L'ensemble $A = \{u \in E : \ u_0 = 0\}$ est-il fermé dans E muni de la norme $\| \cdot \|_1$? Que se passe t'il si on munit E de la norme $\| \cdot \|_\infty$?
Indication : On pourra étudier l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(u) = u_0$.
2. L'ensemble $B = \{u \in E : \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1\}$ est-il fermé dans E muni de la norme $\| \cdot \|_1$? Que se passe t'il si on munit E de la norme $\| \cdot \|_\infty$?
3. Considérons l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(u) = \sum_{n \geq 0} u_n$.
   (a) Montrer que T est continue si E est muni de la norme $\| \cdot \|_1$.

(b) Montrer que T n'est pas continue si E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

4. **(Bonus)** – On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. L'ensemble B est-il compact ?

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, p, q, r trois nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ et f, g, h trois fonctions mesurables positives sur X. Montrer que

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r \ .$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin **(Bonus)** ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 5. **(Leitmotiv de la théorie des problèmes inverses)** – Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$ défini par $f \mapsto f'$. Démontrer que D n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ où $\|\cdot\|_E$ est une norme quelconque sur E.

Corrigés des exercices

Solution 1. [énoncé]

Quelques éléments de réponses

Considérons q un réel conjugué avec p. Nous commençons par démontrer que l'application est bien définie. Il est facile de voir que $\chi \in L^q(X,\mu)$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on observe que $\chi f \in L^1(X,\mu)$ avec l'inégalité

$$\|\chi f\|_1 \leq \|\chi\|_q \|f\|_p \ ,$$

ce qui assure que $\|T\| \leq \|\chi\|_q$. Le calcul de la norme se fait à partir du cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder. Pour cela, il suffit de prendre $f = \chi^{q-1}$.

Solution 2. [énoncé]

Voir l'exercice 6 du TD1.

Solution 3. [énoncé]

1. Considérons l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(u) = u_0$.
   On observe que $A = T^{-1}(\{0\})$. A s'écrit donc comme l'image réciproque du singleton $\{0\}$ par T. Pour démontrer que A est un fermé, il suffit donc de démontrer que T est continue.
   — **1er cas** : $(E, \|\cdot\|_1)$.
   $$|T(u)| = |u_0| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1 \ .$$
   Donc T est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $\mathbb{R}$
   — **2er cas** : $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
   $$|T(u)| = |u_0| \leq \|u\|_\infty \ .$$
   Donc T est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$
2. Considérons l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
   — **1er cas** : $(E, \|\cdot\|_1)$.
   $$|T(u)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1 \ .$$
   Donc T est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que l'ensemble $B = T^{-1}(\{1\})$ est fermé.
   — **2er cas** : $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
   Nous allons démontrer que l'ensemble B n'est pas fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit
   $$u_k = (\underbrace{\frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{k}}_{k \text{ termes}}, 0, 0, \cdots) \in E \ .$$
   Il est facile de voir que $(u_k)_{k\geq 1} \in B^{\mathbb{N}}$. Montrons que $(u_k)_{k\geq 1}$ converge vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

On voit que $\lim_{k\to\infty} \|u_k - 0_E\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Il s'ensuit que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ converge vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Comme $0_E \notin B$, on peut conclure que B n'est pas fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

3. (a) Dans la question (2), nous avons démontré que T est continue T est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $\mathbb{R}$
   (b) Dans la question (2), nous avons démontré que T n'est pas continue T est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$
4. Nous allons démontrer que l'ensemble B n'est pas compact dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
   Soit $(e_k)_{k\geq 0}$ la base canonique de E. Pour tout $k \geq 0$, on voit que $e_k \in B$.
   Supposons que B est compact. Dans ce cas, on peut extraire une sous-suite convergente $(e_{\phi(k)})_{k\geq 0}$. En particulier, la suite $(e_{\phi(k)})_{k\geq 0}$ est une suite de Cauchy.
   Cependant, pour tout $j \neq k$, on a $\|e_{\phi(j)} - e_{\phi(k)}\|_1 = 2$ ce qui mène à une contradiction.
   On en conclut que B n'est pas compact.

Solution 4. [énoncé]

Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. En appliquant l'inégalité de Hölder pour les nombres conjugés p et s, on obtient

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|gh\|_s \ .$$

Par ailleurs, l'inégalité de Hölder généralisée (cf TD1, exercice 7) permet d'écrire

$$\|gh\|_s \leq \|g\|_q \|h\|_r \ ,$$

ce qui assure que

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r \ .$$

Solution 5. [énoncé]

Soient $\|\cdot\|_E$ une norme quelconque sur E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = e^{nx}$, pour tout $n \geq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|Df_n\|_E = \|nf_n\|_E = n\|f_n\|_E \ .$$

Il suit que $\lim_{n\to\infty} \frac{\|Df_n\|_E}{\|f_n\|_E} = +\infty$ ce qui contredit la continuité de D.

Rappel : En effet, dans le cas contraire, il existe une norme $\|\cdot\|_E$ sur E pour laquelle D est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$, et donc

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall f \in E, \|Df\|_E \leq M\|f\|_E \ .$$

ce qui assure que $\lim_{n\to\infty} \frac{\|Df_n\|_E}{\|f_n\|_E} \leq M$.