Guide de survie en théorie de la mesure et en probabilités

Guillaume Garnier, Garance Henrion

https://www.guillaumegarnier.com

17 décembre 2023

Manuel d'utilisation

Ce guide de survie à pour but de regrouper quelques résultats importants en théorie de la mesure et en théorie des probabilités. Il a pour but de **compléter** la formation qu'un.e jeune pitchoun.e pourrait recevoir dans une L3 de mathématiques.

Néanmoins, ce guide ne saurait être suffisant pour fournir une formation complète de cette théorie. En particulier, les auteurices insistent sur le fait que **ce guide ne dispense pas de la lecture attentive du cours, ni de la révision/réalisation des feuilles de TDs** proposées dans cette matière. Le non–suivi de cette recommandation n'engage que la responsabilité de le.a lecteur.rice.

Si le.a lecteur.rice constate ce qu'iel pense être une erreur ou une imprécision, les auteurices l'invitent à faire remonter ces constats au premier auteur [a].

a. Contact : guillaume.garnier@sorbonne-universite.fr

Table des matières

Introduction

Dans les contrées de Mathématistan, chaque mathématicien.ne en devenir a l'obligation de visiter au moins une fois dans sa vie les plages infinies de la théorie de la mesure. Sur ces plages de sable fin, on y découvre une nouvelle manière de mesurer l'univers.

Bien entendu, le.a jeune lecteurice peut se demander : pourquoi voudrait-on mesurer l'univers ? Dans l'univers des possibles, les mathématicien.ne.s ont montré qu'il était extrêmement bénéfique de mettre une mesure, un poids, à chaque événement : le poids d'un événement est appelé la probabilité de ce dernier.

De la même manière, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut être vu comme la répartition d'une masse sur la droite infinie des réels. Calculer son intégrale $\int f$, c'est sommer toute cette masse.

Notations :

Dans tout ce qui suit, les auteurices ont décidé d'utiliser le féminin générique comme neutre plutôt que l'écriture épicène afin de « faciliter » la lecture de ce guide. En particulier, ce récit considérera le voyage d'une jeune mathématicienne sur les plages de la théorie de la mesure.

Dans l'ensemble de ce texte, l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers naturels sont notés

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}\ ,\ \ \mathbb{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$$

L'ensemble des nombres entiers strictement positifs est noté

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \cdots\}$$

L'ensemble des nombres rationnels est noté

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : (p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})\right\}$$

De plus, $\mathbb{K}$ désigne le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Première partie
Théorie de la mesure – Quelques principes de base

1 Quelques rappels de la théorie des ensembles

On rappelle que l'application **réciproque** conserve toutes les relations ensemblistes.

Proposition 1.1. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors pour toute partie A, B de F

1. $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

Le logiciel D∃∀DUCTION (lien cliquable) [1] propose une aide à l'apprentissage de la démonstration mathématique. En particulier, il propose une bibliothèque d'exercices pour apprendre à rédiger une preuve ensembliste. La jeune mathématicienne parvint à démontrer les assertions de la proposition 1.1 grâce à un entraînement sur ce logiciel.

2 Jour 1 – Tribu sur un ensemble

2.1 Rappels de cours

Comme leur nom l'indique, les plages de la théorie de la mesure sont des endroits où l'on cherche à mesurer des choses. Pour une jeune mathématicienne, cela signifie qu'il va falloir construire une balance : un outil capable de mesurer des parties de l'espace.

Dans un monde parfait, une telle balance devrait être capable de mesurer toutes les parties de l'espace. En un sens, si X est un ensemble, on voudrait que tous les éléments de $\mathscr{P}(X)$ soient mesurables. Malheureusement, en un sens on peut se rendre compte qu'il y a trop de parties mesurables si on les prends toutes.

Dès lors, il est important de comprendre quelles sont les attentes minimales que l'on souhaite avoir.

- On veut pouvoir mesurer tout l'espace.
- Si on peut mesurer un truc, on aimerait pouvoir mesurer aussi tout le reste.
- Si on a réussi à mesurer différents trucs, on veut pouvoir les peser tous ensemble sur la balance. La lectrice étant mathématicienne, il est raisonnable de vouloir poser un ensemble dénombrable d'objets mesurables sur la balance.

En bref, tout cela conduit une jeune mathématicienne à vouloir définir une tribu sur un ensemble.

1. Plus d'informations sur la page de Frédéric Le Roux : https ://perso.imj-prg.fr/frederic-leroux/

Définition 2.1 (Tribu sur un ensemble)**.** Une TRIBU $\mathscr{A}$ sur un ensemble non vide X est une collection elle-même non vide de parties de X, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable, *i.e.*

1. $X \in \mathscr{A}$;
2. $\forall A \in \mathscr{A}$, $E - A \in \mathscr{A}$;
3. $\forall (A_n)_n \subset \mathscr{A}$, $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$.

Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les PARTIES MESURABLES de X. On dit que le couple $(X, \mathscr{A})$ est un ESPACE MESURABLE.

La jeune mathématicienne regarda avec profit une vidéo faite par Sébastien Martineau durant le confinement : Comment réviser les tribus ? (lien cliquable) Il y évoque des exercices du TD3, la numérotation est bien la même que durant l'année scolaire 2020-2021.

Remarque 2.1.1. Si X est un ensemble non vide, alors

— $\mathscr{A} = \mathscr{P}(E)$ est une tribu sur X.

— $\mathscr{A} = \{\varnothing, E\}$ est une tribu sur X : on dit que c'est la tribu TRIVIALE.

Dès lors, il est naturel pour une apprentie mathématicienne de se poser la question suivante : *"Si on veut mesurer une partie $\mathscr{R} \subset X$, comment construire une tribu sur X dans laquelle $\mathscr{R}$ est mesurable ?"*

Pour répondre à cette question, il faut commencer par remarquer que l'intersection de tribus est encore une tribu : dès lors, il est possible de parler de la plus petite tribu possible contenant $\mathscr{R}$.

Définition 2.2. Soient X un ensemble et un sous-ensemble $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(X)$. Il existe une plus petite tribu $\sigma(\mathscr{R})$ sur X qui rend tous les éléments de $\mathscr{R}$ mesurables. On a

$$\boxed{\sigma(\mathscr{R}) = \bigcap_{\mathscr{A} \text{ tribu} : \mathscr{R} \subset \mathscr{A}} \mathscr{A}}$$

On dit que $\sigma(\mathscr{R})$ est la TRIBU ENGENDRÉE par $\mathscr{R}$.

Remarque 2.2.1. La notion de tribu engendrée permet de définir naturellement une tribu sur un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. En effet, soit $\mathscr{O}$ la classe des ouverts de X. On appelle TRIBU BORÉLIENNE sur X la tribu $\sigma(\mathscr{O})$. Elle est noté $\mathscr{B}(X)$.

En particulier, $\mathscr{B}(X)$ contient les parties ouvertes et les parties fermées de X.

Point méthode 1 (CAT pour démontrer une égalité du type : $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{A}$)**.**

1. On montre que $\mathscr{A}$ est une tribu.
2. On montre que $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}$. Pour cela on montre généralement que pour tout $R \in \mathscr{R}, R \in \mathscr{A}$. Ceci assure que

$$\boxed{\sigma(\mathscr{R}) \subset \mathscr{A}}$$

3. On montre que tout élément de A peut s'obtenir à partir des éléments de $\mathscr{R}$ à partir d'unions dénombrables et de passage au complémentaire.

2.2 Les défis du jour

Exercice 2.1. [solution] Soient X un ensemble, $(Y, \mathscr{Y})$ un espace mesurable et une application $\varphi : X \to Y$. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{X} = \{\varphi^{-1}(A) : A \in \mathscr{Y}\}$ est une tribu sur X.

Exercice 2.2. [solution]

Q°1) Démontrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - n| < \frac{1}{n}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Q°2) Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$

(a) La diagonale $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.

3 Jour 2 – Les mesures positives

3.1 Rappel de cours

Définition 3.1 (Mesure positive)**.** Une MESURE POSITIVE sur un ensemble mesurable $(X, \mathscr{A})$ est une application $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ vérifiant :

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. **(σ–additivité)** Pour toute collection dénombrable $(A_n)_n$ d'ensembles mesurables **disjoints deux à deux**, on a

$$\boxed{\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)}\,.$$

Théorème 3.2. **(Règles d'utilisation)** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors

1. **(Croissance)** Si A_1, A_2 sont deux parties mesurables telles que $A_1 \subset A_2$ alors

$$\boxed{\mu(A_1) \leq \mu(A_2)}\,.$$

Si de plus, $\mu(A_2) < \infty$, alors $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$.

2. **(σ-sous-additivité)** Si $(A_n)_n$ sont des parties mesurables alors

$$\boxed{\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)}\,.$$

3. **(Limite Croissante)** Si $A_0 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ sont des parties mesurables alors

$$\boxed{\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)}\,.$$

4. **(Limite Décroissante)** Si $A_0 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ sont des parties mesurables et si $\boxed{\mu(A_0) < \infty}$ alors

$$\boxed{\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)}\ .$$

3.2 Les défis du jour

Exercice 3.1. [solution] Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur une même tribu $\mathscr{T}$ de parties d'un ensemble X. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu_n(X) = 1$. Considérons l'application

$$\begin{cases} \nu : \mathscr{T} & \longrightarrow & [0,\infty] \\ \quad T & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Montrer que ν est une mesure sur $\mathscr{T}$ telle que $\nu(X) = 1$.

Exercice 3.2. [solution] Donner un exemple d'espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et de suite décroissante de parties $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tels que

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) \neq \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n)\ .$$

4 Jour 3 – Classes monotones et π–systèmes

4.1 Rappels de cours

Tout l'enjeu en théorie de la mesure consiste à construire des mesures sur des tribus bien choisies. Le problème, c'est qu'en pratique une tribu est un objet souvent assez complexe à décrire, sur lequel construire une mesure peut s'avérer difficile.

— Un π-SYSTÈME sur E est une famille de parties stable par intersection finie et qui contient E ;

— Une CLASSE MONOTONE sur E est une famille de parties stable par **union croissante**, par **différence** et qui contient E.

Définition 4.1 (Classe monotone)**.** Soit E un ensemble non vide. Un sous-ensemble $\mathscr{M}$ de $\mathscr{P}(E)$ est une CLASSE MONOTONE si

1. $E \in \mathscr{M}$;
2. **(Stabilité par différence propre)** : $A, B \in \mathscr{M}$ et $A \subset B$ assure que $B \setminus A \in \mathscr{M}$;
3. **(Stabilité par union dénombrable croissante)** pour toute suite $(A_n)_n \in \mathscr{M}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ assure que $\bigcup_n A_n \in \mathscr{M}$.

Définition 4.2 (π-système)**.** Soit E un ensemble non vide. Un sous-ensemble $\Pi \in \mathscr{P}(E)$ est un π-SYSTÈME si

1. $E \in \Pi$;
2. Pour tous $A, B \in \Pi$, on a $A \cap B \in \Pi$.

Théorème 4.3. Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, ν, μ deux mesures sur $(X, \mathscr{A})$ et $\mathscr{C}$ un π–système sur X tel que

$$\forall A \in \mathscr{C}\ ,\ \ \mu(A) = \nu(A) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}\,.$$

Alors

1. si $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, alors $\boxed{\mu = \nu}$.
2. s'il existe une suite croissante de parties $(X_n)_n \in \mathscr{C}$ telle que

$$X = \bigcup X_n \quad \text{et} \quad \mu(X_n) = \nu(X_n) < \infty$$

alors $\boxed{\mu = \nu}$.

Point clé 1. Ce théorème est très important, puisqu'il permet d'identifier deux mesures. Par exemple, il garantit l'unicité de la mesure de Lesbesgue.

4.2 Les défis du jour

Exercice 4.1. [solution] **(Partiel 2022)** Soit X un ensemble non vide. Est-ce qu'une classe monotone $\mathscr{M}$ sur X est forcément une tribu ?

Exercice 4.2. [solution] Considérons l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

On note $\Pi = \{\mathbb{R}\} \cup \{]a, b[: a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Q°1) Démontrer que Π est un π–système.

Q°2) En déduire qu'il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant que

$$\forall a \leq b \in \mathbb{R}\ ,\ \ \lambda(]a, b[) = b - a\ .$$

5 Jour 4 – Limites inférieures et supérieures

5.1 Rappels de cours

Définition 5.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle LIMITE SUPÉRIEURE de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} u_p}\ .$$

De même, on définit la LIMITE INFÉRIEURE de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{p\geq n} u_p} \,.$$

La jeune mathématicienne, trouvant cette définition bien abstraite, fit à nouveau appel à Sébastien Martineau pour s'en faire une intuition : Explications sur la limsup et la liminf (lien cliquable)

Proposition 5.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Notons $\Omega(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérences. Alors

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$ et dans ce cas
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n} \,.$$
2. L'ensemble $\Omega(u)$ n'est pas vide.
3. On a l'inclusion $\Omega(u) \subset [\liminf_{n\to\infty} u_n, \limsup_{n\to\infty} u_n]$.
4. On a $\liminf_{n\to\infty} u_n \in \Omega(u)$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n \in \Omega(u)$.
5. La suite $(u_n)_n$ converge et et seulement si $\Omega(u)$ est réduit à un point.

Point méthode 2 (La méthode classique)**.** Pour résoudre une question portant sur des $\limsup$, la méthode suivante marche assez souvent :

1. Ecrire $b_n = \sup\limits_{p\geq n} u_p$ et remarquer que cette suite est décroissante.
2. Résoudre la question pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Conclure en passant à la limite

Proposition 5.3. **(Passage à la $\limsup$ ou à la $\liminf$ dans une inégalité)**
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,, \quad \forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \,.$$

Alors,

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n}$$

5.2 Les défis du jour

Exercice 5.1. [solution] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

1. Montrer que $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.
2. Montrer que $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Exercice 5.2. [solution] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$$

6 Jour 5 – Fonctions mesurables

6.1 Rappels de cours

Définition 6.1. Soient $(X,\mathscr{A})$ et $(Y,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : X \to Y$ est MESURABLE si

$$\boxed{\forall B \in \mathscr{B}\ ,\ \ f^{-1}(B) \in \mathscr{A}}\ .$$

Sur les plages de la théorie de la mesure, il est nécessaire de se demander si une application est mesurable à chaque fois que l'on en rencontre une. Malheureusement, il n'est pas vraiment possible d'utiliser la définition précédente puisqu'il est assez rare de pouvoir décrire chaque ensemble mesurable. Heureusement, il existe un critère de mesurabilité qui nous permet de ne considérer qu'une petite partie d'ensemble mesurable.

Proposition 6.2. **(Critère de mesurabilité)** Soient $(X,\mathscr{A})$ et $(Y,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables. Soit $\mathscr{C}$ une famille de parties telle que $\sigma(C) = \mathscr{B}$. L'application $f : X \to Y$ est mesurable si et seulement si,

$$\boxed{\forall C \in \mathscr{C}\ ,\ \ f^{-1}(C) \in \mathscr{A}}\ .$$

Pour montrer qu'une application est mesurable, il est souvent plus commode de l'écrire à l'aide de fonctions *mesurables* de références.

Proposition 6.3. **(Opérations sur les fonctions mesurables)**

1. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Alors la fonction

   $$\boxed{\lambda f\ ,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{R}}}$$

   est mesurable.
2. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Alors les fonctions

   $$\boxed{f+g\ ,\ \ fg\ ,\ \ \frac{f}{g}}$$

   sont mesurables sous réserve qu'elles soient bien définies.
3. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Alors les fonctions

   $$\boxed{\min(f,g)\ ,\ \ \max(f,g)\ ,\ \ f^+\ ,\ \ f^-}$$

   sont mesurables

4. **(Composée)** Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions mesurables. Alors la composée

$$\boxed{g \circ f}$$

est mesurable

5. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de X vers $\overline{\mathbb{R}}$ mesurables, alors les fonctions

$$\boxed{\sup_n f_n\ ,\quad \inf_n f_n\ ,\quad \limsup_n f_n\ ,\quad \liminf_n f_n}$$

sont mesurables

6.2 Exercices

Exercice 6.1. [solution] Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont mesurables.
   (a) La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.
   (b) La dérivé f' d'une fonction mesurable f.
   (c) La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 0, \\ e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
   (d) Sans utiliser la question (2.b), démontrer que l'application partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est mesurable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.
   (a) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un intervalle.
   (b) En déduire que f est mesurable.

Exercice 6.2. [solution] Soient $(E, \mathscr{E})$ et $(F, \mathscr{F})$ deux ensembles mesurables. Décrire l'ensemble des fonctions mesurables lorsque

1. $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(F)$.
2. $\mathscr{E} = (E, \varnothing)$ et $\mathscr{F} = (F, \varnothing)$.
3. $\mathscr{E} = (E, \varnothing)$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(F)$.
4. $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{F} = (F, \varnothing)$.

7 Jour 6 – Construction de l'intégrale et Echange limites

7.1 Rappels de cours

Théorème 7.1. **Lemme technique** Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et $f : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ une application $\mathscr{E}$–mesurable. Il existe une suite de parties mesurables $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ et une suite de réels strictement positifs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,\infty[^{\mathbb{N}}$ tel que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \mathbb{1}_{B_n} .$$

Point méthode 3. En pratique le lemme technique s'utilise de la manière suivante :

1. Démontrer qu'un résultat est vrai pour les fonctions indicatrices.
2. Montrer le résultat pour toute fonction f mesurable et positive. Pour cela on réécrit f comme une série d'indicatrice avec le lemme technique puis on utilise un inversion *série / intégrale positive*.
3. Montrer le résultat pour toute fonction mesurable en séparant la partie positive de la partie négative.

Les théorèmes suivants sont particulièrement importants puisqu'ils permettent de faire un *échange intégrale / limite*.

Théorème 7.2. **(Lemme de Fatou)** Soit $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans $[0,\infty]$, $\mathscr{E}$–mesurables. Alors

$$\int_E \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Théorème 7.3. **(Convergence monotone)** Soit $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'applications de E dans $[0,\infty]$, $\mathscr{E}$–mesurables et $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Alors

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Théorème 7.4. **(Convergence dominée)** Soient $(E,\mathscr{E},\mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans $\mathbb{C}$, $\mathscr{E}$–mesurables vérifiant :

1. la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ μ–presque partout ;
2. il existe une application $g : E \to [0,\infty]$, $\mathscr{E}$–mesurable telle que
$$\int_E g \,\mathrm{d}\mu < \infty$$
vérifiant $|f_n| \leq g$ μ–presque partout.

Alors,

1. Les applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont intégrables et il existe une application $f : E \to \mathbb{C}$, $\mathscr{E}$–mesurable et μ–intégrable telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, μ–p.p.

2. $\lim_{n\to\infty} \int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.

7.2 Les défis du jours

Exercice 7.1. [solution] **(TD7 - Exo 2)** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A \in \mathscr{E}$. Pour tout $B \in \mathscr{E}$, on pose $\nu(B) = \mu(B \cap A)$.

1. Montrer que $\nu : \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ est une mesure.
2. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\mathscr{E}$–mesurables. On veut montrer que

$$\int_E f \,\mathrm{d}\nu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{1}$$

   (a) Montrer que l'équation (1) est vérifiée pour toute fonction de la forme $f = \mathbb{1}_B$ où B est un ensemble mesurable quelconque de $\mathscr{E}$.

   (b) En déduire que l'équation (1) est vérifiée pour toute fonction $\mathscr{E}$–mesurable et positive en utilisant le lemme *"technique"* et le théorème d'interversion série-intégrale positive.

Exercice 7.2. [solution] Soient $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. Supposons que f est intégrable. Etudier la convergence de la suite

$$I_n = n \int_E \ln(1 + \frac{f}{n}) \,\mathrm{d}\mu \,.$$

   lorsque $n \to \infty$.
2. Que se passe-t'il si $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \infty$.

8 Jour 7 – Construire des fonctions

Il est assez agréable de constater que chacune se sent l'âme d'une bâtisseuse sur les plages de la théorie de la mesure. Une enfant voudra construire des châteaux de sables, tandis qu'une mathématicienne voudra construire des fonctions sur le sable. Dès lors le prototype d'une telle fonction est assez immédiat :

$$\varphi(t) = \int_X f(t, x) \,\mathrm{d}t \,.$$

Point clé 2. L'une des forces de la théorie de la mesure, c'est qu'elle permet de construire facilement des fonctions.

8.1 Continuité et dérivabilité

Dès lors, les *"questions classiques"* se posent. Comment savoir si une telle fonction est continue ou dérivable ?

Théorème 8.1. **(Continuité sous le signe de l'intégrale)** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, (U, d) un espace métrique et une application $f : U \times X \to \mathbb{K}$.
Soit $u_0 \in U$. Si

1. l'application $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable pour tout $u \in U$;
2. l'application $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_0, $\mu(dx) - p.p$;
3. il existe une application $g : X \to \mathbb{K}$ intégrable tel que pour tout $u \in U$, $x \in X$

$$\boxed{|f(u,x)| \leq g(x)\ ,\ \ \mu(dx) - p.p}$$

Alors l'application $F(u) \mapsto \int_X f(u,x)\, \mu(dx)$ est bien définie sur U. Elle est de plus continue en u_0.

Théorème 8.2. **Dérivation sous le signe de l'intégrale** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une application $f : I \times X \to \mathbb{K}$. Soit $u_0 \in I$. Si

1. l'application $x \mapsto f(u, x)$ est intégrable pour tout $u \in U$;
2. l'application $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable en u_0 $\mu(dx)$–p.p ;
3. il existe une application $g : X \to \mathbb{K}$ intégrable tel que pour tout $u \in U$, $x \in X$

$$\boxed{|\partial_u f(u,x)| \leq g(x)\ ,\ \ \mu(dx) - p.p}$$

Alors l'application $F(u) = \int_X f(u,x)\, \mu(dx)$ est dérivable en u_0 de dérivée

$$F'(u_0) = \int_X \partial_u f(u_0, x)\, \mu(dx)$$

Remarque 8.2.1. Ces deux derniers théorèmes sont essentiels pour voyager sans difficultés dans Mathématistan. En effet, il est assez courant en sciences de faire l'utilisation de fonctions définies par des intégrales. A titre d'exemple, on pourra citer la très célèbre transformation de Fourier qui permet d'écrire d'écrire une fonction à l'aide d'une intégrale sur ses fréquences.

Point clé 3. A première vue, ces théorèmes peuvent sembler hostile à la jeune mathématicienne qui commence son long périple sur les plages de la théorie de la mesure. Les théorèmes sont longs car il y a beaucoup d'hypothèses à vérifier.
Lorsqu'on y réfléchit bien, toutes ces hypothèses sont assez facile à retrouver.

8.2 Les défis du jour

Exercice 8.1. [solution] Soient $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que la fonction

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) \mu(dx)\ .$$

est continue sur sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.2. [solution] Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, \mathrm{d}t\ .$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est C^1 et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Deuxième partie

Corrigés des exercices

Solution 2.1. [énoncé]

> **Point méthode 4.** Pour démontrer qu'un ensemble de parties sur X est une tribu, il s'agit généralement de vérifier qu'il vérifie les trois axiomes qui définissent une tribu.

Montrons que $\mathscr{X}$ vérifie l'axiomatique des tribus.

— *(Non vide)*
  On sait que $\varnothing \in \mathscr{Y}$. Il s'ensuit que $\varnothing = \varphi^{-1}(\varnothing) \in \mathscr{X}$.

— *(Stable par passage au complémentaire)*
  Soit $A \in \mathscr{X}$. Il existe un ensemble mesurable $B \in \mathscr{Y}$ tel que $\varphi^{-1}(B) = A$. Les propriétés classiques de la réciproque d'une fonction assurent que $\varphi^{-1}(B^c) = \varphi^{-1}(B)^c = A^c$. Par stabilité de $\mathscr{Y}$ par passage au complémentaire, $B^c \in \mathscr{Y}$. Il s'ensuit que $A^c \in \mathscr{X}$.

— *(Stable par union dénombrable)*
  Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{X}$. Par définition de $\mathscr{X}$, il existe une suite d'éléments $(B_n)_n \in \mathscr{Y}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \varphi^{-1}(B_n) = A_n\ .$$

  Posons $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{Y}$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathscr{Y}$. Les propriétés classiques de la réciproque d'une fonction assurent que

$$\varphi^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

  ce qui montre que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{X}$.

Il s'ensuit que $\mathscr{X}$ est une tribu sur X.

Solution 2.2. [énoncé]

Point clé 4. Ici, l'idée principale consiste à réécrire les différents ensembles à l'aide d'ouverts et de fermés.

Q°1) On peut réécrire $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[$. On constate que A peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ensembles mesurables. Il s'agit donc d'un borélien de $\mathbb{R}$.

Q°2) (a) L'ensemble Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, c'est donc un borélien de $\mathbb{R}^2$. (On démontre que Δ est fermé en montrant que c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue $f(x, y) = x - y$).

(b) On peut écrire B comme une intersection d'ensembles mesurables. En effet :

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

On constate que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ est bien mesurable comme l'image réciproque de $\{1\}$ de la fonction continue $f(x, y) = x^2 + y^2$.
De même, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est bien mesurable : en effet, $\mathbb{Q}$ est mesurable car on peut l'écrire comme une union dénombrable de singletons. Il s'ensuit que son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est mesurable.

Solution 3.1. [énoncé]

Point méthode 5. Pour démontrer que ν est une mesure, nous allons démontrer qu'elle vérifie l'axiomatique des mesures.

Pour commencer, on constate que

$$\nu(\varnothing) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(\varnothing)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \, .$$

ce qui assure que $\boxed{\nu(\varnothing) = 0}$.
Considérons désormais une suite de parties mesurables $(A_k)_k \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjointes. Posons $A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$. Alors :

$$\nu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_k\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_k\right)}{2^{n+1}} \, .$$

Par σ–additivité, on a

$$\nu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_n(A_k)}{2^{n+1}} \, .$$

Comme les termes sous les signes sommes sont positifs, par échange des signes sommes (théorème de Fubini) on obtient que

$$\nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(A_k)}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(A_k)}{2^{n+1}} \, .$$

Ceci assure que

$$\boxed{\nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(A_k)}\ .$$

Solution 3.2. [énoncé]

> **Point clé 5.** Ici, il faut considérer une situation où $\mu(T_0) = +\infty$, sinon il y aura égalité d'après la propriété de décroissance séquentielle des mesures.

Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ où μ_d désigne la mesure de dénombrement sur les parties de $\mathbb{N}$. Considérons la suite décroissante de parties $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par

$$T_n = [n, +\infty[\ .$$

On a $\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n = \varnothing$ donc $\mu_d\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = 0$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_d(T_n) = +\infty$. Il s'ensuit que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_d(T_n) = +\infty$ ce qui permet de conclure.

Solution 4.1. [énoncé]

Non. En effet, Soit $E = \{1, 2, , 3, 4, 5\}$. Posons $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$.
On remarque que $\mathscr{M} = \{\varnothing, A, B, E \setminus A, E \setminus B, E\}$ est une classe monotone, mais ce n'est pas une tribu.

Solution 4.2. [énoncé]

Q°1) On remarque que Π contient $\mathbb{R}$. Aussi, pour tout $a \le b$ et $(c \le b)$, on a

$$]a, b[\cap]c, d[=]\max(a, c), \min(b, d)[\ .$$

ce qui assure que Π est stable par intersection finie.

Q°2) Supposons l'existence de deux telles mesures λ_1 et λ_2. La suite $X_n =]-n, n[$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite croissante de Π telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $\lambda_1(X_n) = \lambda_2(X_n) = 2n < \infty$.
Il s'ensuit que $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$.

Solution 5.1. [énoncé]

Refaire l'exo 5 du TD 4

Solution 5.2. [énoncé]

Refaire l'exo 5 du TD 4

Solution 6.1. [énoncé]

1. (a) $\mathbb{Q}$ borélien car dénombrable. Sa fonction indicatrice est donc mesurable.
   (b) Vu en TD.

(c) Considérons les fonctions $g : x \mapsto x+2$ et $h : x \mapsto e^x$. Ces fonctions sont continues et donc mesurables.
Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(A) = \Big(h^{-1}(A) \cap]-\infty, 0)\Big) \cup \Big(g^{-1}(A) \cap]0, +\infty)\Big)$. Il s'ensuit que $f^{-1}(A)$ est mesurable en tant qu'intersection et réunion de parties mesurables.

(d) Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ une partie mesurable. On observe que $\lfloor \cdot \rfloor^{-1}(A) = \bigcup_{n \in A \cap \mathbb{Z}} [n, n+1[\in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ce qui permet de conclure.

2. (a) Quitte à considérer la fonction $-f$, nous supposons que la fonction f est croissante. Soit $c \in \mathbb{R}$. Notons $a = \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}$. Comme f est croissante, pour tout $x < a$, on a $f(x) < c$, donc $]-\infty, a[\subset f^{-1}(]-\infty, c[)$. Par ailleurs, pour tout $x > a$, on a $f(x) > c$, donc $f^{-1}(]-\infty, c[) \subset]-\infty, a]$.
On en déduit donc que $f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a][$ ou $f^{-1}(]-\infty, c[) =]-\infty, a]$.

(b) Étant donné que les intervalles $]-\infty, c[$ $(c \in \mathbb{R})$ engendre la tribu borélienne, on en déduit que la fonction f est mesurable.

Solution 6.2. [énoncé]

1. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction $f : E \to F$ et pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathscr{P}(E) = \mathscr{E}$.
2. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction $f : E \to F$, on a $f^{-1}(F) = E$ et $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
3. Seules les fonctions constantes sont mesurables.
Si f prend au moins deux valeurs a, b dans F, alors $f^{-1}(a) \neq \varnothing$ et $f^{-1}(a) \neq E$, donc f n'est pas mesurable.
Si f est constante, alors elle est mesurable. En effet, supposons que $f(x) = a$ pour tout $x \in E$.
4. Toute fonction est mesurable : pour toute fonction $f : E \to F$ et pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a $f^{-1}(A) \in \mathscr{P}(E) = \mathscr{E}$.

Solution 7.1. [énoncé]

Voir TD7 - Exo 2

Solution 7.2. [énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = n \ln(1 + \frac{f(x)}{n})$. On veut appliquer le théorème de convergence dominée.
Un simple DL assure que $f_n(x) \to -f(x)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq |n\frac{f(x)}{n}| = |f(x)|$ qui est intégrable (et indépendante de n).

Le théorème de convergence dominée assure que $I_n \to -\int_E f \, \mathrm{d}\mu$.
2. Considérons la fonction $f = 1$. Dans ce cas, la suite diverge vers ∞.