Guide de survie en analyse fonctionnelle

Guillaume Garnier, Garance Henrion
https://www.guillaumegarnier.com
2 février 2024

Manuel d'utilisation

Ce document est un contenu pédagogique créé afin de **compléter** la formation dispensée durant l'année scolaire 2022-2023 au groupe de TD3 dans le TD d'analyse fonctionnelle (LU3MA210, Sorbonne–Université).

En particulier, les auteurices insistent sur le fait que **ce guide ne dispense pas de la lecture attentive du cours, ni de la révision/réalisation des feuilles de TDs** proposées dans cette matière. Le non–suivi de cette recommandation n'engage que la responsabilité de le.a lecteur.rice.

Si le.a lecteur.rice constate ce qu'iel pense être une erreur ou une imprécision, les auteurices l'invitent à faire remonter ces constats au premier auteur [a].

a. Contact : guillaume.garnier@sorbonne-universite.fr

Table des matières

Introduction

Lors de son premier voyage dans les plaines de l'analyse fonctionnelle, le.a jeune mathématicien.ne se perd souvent assez vite devant la diversité des paysages qu'iel rencontre. Les sentiers sont escarpés et les chemins souvent raides et broussailleux.

Le présent document a pour but de guider le.a lecteur.rice à travers l'immense variété de paysages qu'iel pourrait rencontrer et de lui fournir le matériel d'expédition nécessaire pour voyager sans danger dans ces terres de mystères. Au cours de ce voyage, vous vous rendrez vite compte que les paysages ne manquent pas.

Notations :

Dans tout ce qui suit, les auteurices ont décidé d'utiliser le féminin comme neutre plutôt que l'écriture épicène afin de « faciliter » la lecture de ce guide. En particulier, ce récit considérera le voyage d'une jeune mathématicienne dans les plaines de l'analyse fonctionnelle.

Désormais, $\mathbb{K}$ désigne le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsque l'on définit un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, on suppose systématiquement que la mesure μ est positive. La lectrice pourra consulter [2] pour obtenir plus d'informations sur le sujet et/ou trouver des exemples de mesures qui ne sont pas positives.
Si (X, d) est un espace métrique, on note $\mathscr{B}(X)$ sa tribu borélienne, *i.e.* la plus petite tribu sur X qui contient toutes les parties ouvertes.

1 Jour 1 - Continuité des opérateurs

1.1 Rappels de cours

En analyse fonctionnelle, il est assez fréquent de se promener dans des espaces vectoriels normés. Pour passer de l'un à l'autre, on utilise généralement des applications linéaires, puisqu'elles permettent de conserver la structure algébrique de nos espaces.

À ce stade de votre voyage dans le monde des mathématiques, vous devez être convaincues de l'importance de savoir si une application est continue ou non.

Avant de franchir les portes du monde de l'analyse fonctionnelle, les choses étaient plutôt simples. Tous les espaces vectoriels auxquels vous étiez confrontées étaient de dimension finie. Dès lors tout allait bien car *une application linéaire est toujours continue en **dimension finie**.*

Cependant, le monde des mathématiques est bien plus vaste que la seule dimension finie. En particulier, une bonne partie des espaces intéressants sont des espaces de fonctions de dimension infinie. Dans ces univers infiniment plus grands, les choses deviennent bien plus compliquées puisqu'*il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues.*

À chaque fois que l'on voyage à l'aide d'une application linéaire, il faut donc se demander si cette application est continue ou non. Heureusement, il est inutile ici de sortir nos epsilons de notre boite à outils. Comme notre application est linéaire, il existe un critère bien plus simple que l'on peut utiliser.

Proposition 1.1. **(Critère pratique de continuité)** Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. T est continue si, et seulement si,

$$\boxed{\exists M > 0,\ \forall x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E\ .}$$

La norme de T est la plus petite constante M pour laquelle cette inégalité a lieu. On note cette norme $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}$ ou $\|T\|$ si aucune ambiguïté n'est possible.

1.2 Les défis du jour

Exercice 1.1. [solution] Considérons l'opérateur de Dirac $\delta_0 : \mathscr{C}([0,1];\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, défini par $\delta_0(f) \longmapsto f(0)$.

1. Montrer que δ_0 est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que δ_0 n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 1.2. [solution] Soit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{K})$ muni de la norme $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)dt\ . \end{array}$$

est continu et calculer sa norme.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Pour calculer la norme d'un opérateur continu, on effectue généralement deux étapes :

— Trouver un majorant de la norme.

— Montrer que ce majorant est atteint en choisissant une bonne fonction.

Malheureusement, il n'est pas toujours possible d'utiliser cette stratégie. L'exercice suivant montre qu'il existe des opérateurs bornés pour lesquels la norme n'est pas atteinte.

Exercice 1.3. [solution] **(Agrégation 2021 - Oraux)** Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_1 & \longrightarrow & \ell_1 \\ (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)u_n\right)_{n\geq 0} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme.
2. Peut-on trouver un vecteur $u \in \ell_1$ non nul tel que $\|f(u)\|_1 = \|f\| \cdot \|u\|_1$?

2 Jour 2 - À la gloire des inégalités

2.1 Rappels de cours

Dans la section 1, nous avons présenté rapidement le paysage. Le monde de l'analyse fonctionnelle est un endroit étrange où l'on se déplace avec des opérateurs linéaires. Tout comme on a besoin d'un filet pour attraper des papillons, il faut les bons outils pour "chasser" un opérateur linéaire, c'est-à-dire montrer s'il est continu ou non.

Pour ce faire, on tentera généralement d'écrire une inégalité sur les normes. Mais pour ça, il est donc nécessaire de disposer d'un outillage adapté, forgé pour établir de telles inégalités.

Dans votre programme d'analyse fonctionnelle, vous avez en gros 3 théorèmes pour obtenir ce genre de résultats.
Chaque théorème est constitué de deux parties :

1. L'inégalité
2. Le cas d'égalité

Théorème 2.1. **(Inégalité de Hölder)**

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et des réels $p, q \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors, si f et g sont deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.}$$

Supposons de plus que $p, q \in]1, \infty[$ et $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$. Il y a égalité si, et seulement si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont colinéaires dans $L^1(X, \mu)$, *i.e.* s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\boxed{|f|^p = \lambda |g|^q,\ \mu - pp.}$$

Théorème 2.2. **(Inégalité de Minkowski)**

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in]1, \infty[$, et $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables. Alors

$$\boxed{\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.}$$

Supposons de plus que $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^p(X, \mu)$. Il y a égalité si, et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\boxed{f = \lambda g,\ \mu - pp.}$$

Théorème 2.3. **(Inégalité de Jensen)**

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in L^1(X, I, \mu)$,

$$\boxed{\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f) d\mu.}$$

Lorsque φ est strictement convexe, l'inégalité devient une égalité si, et seulement s'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{f = c,\ \mu - pp}$.

2.2 Les défis du jour

Exercice 2.1. [solution] **(Examen 2016)** – Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $\mathbb{R}_+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\mu(X)^2 \leq \int_X f d\mu \int_X g d\mu .$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2.2. [solution] **(Inégalité de Hölder inversée)** – Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $0 < p < 1$ et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient f, g deux fonctions mesurables.

1. Déterminer le signe de q.
2. Démontrer que $\|f\|_p \|g\|_q \leq \|fg\|_1$.

3 Jour 3 – Espaces de Banach

3.1 Rappels de cours

Au cours de notre périple en analyse fonctionnelle, nous observons différents espaces vectoriels normés. Cependant, la plupart de ces espaces sont assez vides : il y a peu de vecteurs et il est généralement difficile d'avancer.

A force de voyage, on finit néanmoins par trouver toute une famille d'espaces avec de bonnes propriétés.

Définition 3.1 (Espace de Banach)**.** – On appelle ESPACE DE BANACH, tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes.

En plus, c'est très facile de fabriquer des espaces de Banach lorsqu'on en a trouvé un.

Théorème 1. *Si E et F sont des espaces vectoriels normés, et si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E;F)$ est un espace de Banach.*

Ces espaces sont particulièrement intéressants, car il sont complets, *i.e.* sans trou. Il y a suffisamment de points pour être sûre qu'on y retrouve toutes les limites de suites de Cauchy.
En pratique, on préfère toujours voyager dans des espaces de Banach. D'ailleurs, presque tous les espaces importants en analyse sont des espaces de Banach.

Bien sûr, la voyageuse pourra se demander : pourquoi est-ce que l'on aime tellement voyager dans des espaces de Banach ? Une première réponse consiste à dire : *c'est l'une des rares structures d'espace où notre boite à outils contient des théorèmes d'existence.*
En particulier :

— Toute application strictement contractante d'un espace de Banach E dans lui même, admet un unique point fixe.
— Toute application linéaire et continue d'un sous-espace dense d'un espace de Banach E vers un espace de Banach F peut être prolongée de manière unique comme un opérateur de E vers F.
— Toute série absolument convergente est convergente dans un espace de Banach.

Et ces théorèmes ne sont qu'un échantillon bien maigre de tous les outils dont on dispose dans les espaces de Banach. Vous aurez l'occasion d'en rajouter bien d'autres dans la suite de votre voyage en Terres des mathématiques.

Proposition 3.2. Dans un espace vectoriel normé E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E est un espace de Banach.
(ii) Toute série absolument convergente est convergente dans E.

Proposition 3.3. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $H \subset E$ un sous–espace dense de E. Toute application linéaire continue $T : H \to F$ peut être prolongée en une application linéaire continue $\widetilde{T} : E \to F$ et $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

Dès lors, il est important d'avoir une méthode efficace pour savoir si un espace vectoriel normé est un espace de Banach. Il est donc assez pratique de mettre dans sa boite à outils la conduite à tenir (CAT) suivante :

Point méthode 1 (CAT pour montrer qu'un evn E est un espace de Banach)**.**

1. On considère une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E.
2. On considère une limite possible de cette suite x. Généralement, on s'appuiera ici sur les espaces complets $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour montrer que la suite $x_n(t)$ converge vers une limite $x(t)$

et x sera alors l'application $x : t \mapsto x(t)$.

3. On démontre que $x \in E$.
4. On démontre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E.

3.2 Les défis du jour

Exercice 3.1. [solution] Considérons une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de ℓ_1 vérifiant $\|a\|_1 < 1$. Pour toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$, on définit l'opération de convolution

$$a * b = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{1}$$

1. Montrer que $a * b \in \ell_\infty$ pour tout $b \in \ell_\infty$.
2. Soit $f \in \ell_\infty$. Montrer que l'opérateur $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ défini par $T(b) = a * b + f$ est une contraction.
3. En déduire que l'équation $T(b) = b$ admet une unique solution $b \in \ell_\infty$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3.2. [solution] **(Examen 2016)** Soient E un espace vectoriel normé, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Montrer qu'on peut extraire une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(y_{k+1} - y_k)$ est normalement convergente.

4 Jour 4 - Les espaces L^p

4.1 Rappels de cours

Au milieu de la multitude d'espaces de Banach, il y a une classe d'espace que l'on aime tout particulièrement : les espaces L^p.

Ces espaces sont d'une grande utilité dans le monde de l'analyse et des probabilités. D'une part, ce sont des espaces où il est très facile d'utiliser :

— l'inégalité de Hölder,

— l'inégalité de Minkowski.

De plus, ils ont beaucoup de très bonnes propriétés que vous découvrirez dans la suite de votre parcours en mathématique.

Le théorème de base de ces espaces est le suivant :

Théorème 4.1. **(Riesz–Fisher)** L^p est un espace de Banach, pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Une des qualités essentielles des espaces L^p, c'est qu'il est possible d'utiliser toute la puissance de la théorie de la mesure pour démontrer que certaines suites convergent.

Proposition 4.2. **(Convergenge L^p–dominée)** Soient $p \in [1, +\infty[$ fixé et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p. Si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ μ-p.p. et s'il existe $g \in L^p$ tel que $|f_n| \le g$ μ-p.p. pour tout n, alors

$$\boxed{f_n \xrightarrow{L^p} f}.$$

Dès lors, il est assez raisonnable de se poser la question réciproque. Est-ce que la convergence L^p suffit à garantir une convergence μ–presque partout ? La réponse à cette question est négative ! Cependant tout n'est pas perdu, car on arrive quand même à extraire une suite qui converge presque sûrement vers f.

Proposition 4.3. Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Alors, il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-pp.

4.2 Les défis du jour

Exercice 4.1. [solution] Soient $f, g \in L^3(\mathbb{R})$. Démontrer que $f^2 g$ est intégrable.

Exercice 4.2. [solution] Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \ge 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. Démontrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^{(p-1)/p})$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt)^{1/p} \le \varepsilon$.
4. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{(p-1)/p})$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4.3. [solution] **(Produit de convolution)** – Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Notation : On notera désormais $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et que $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

5 Jour 5 – Espaces de Hilbert : Toute la magie du produit scalaire

5.1 Rappels de cours

Dans les sections précédentes, nous avons eu l'occasion de découvrir de nombreuses belles choses sur la manière dont les opérateurs agissent sur un espace de dimension infinie.

Dans la vraie vie mathématique, les choses sont malheureusement rarement aussi simples. Les espaces de dimension infinie sont souvent des lieux dangereux, sans chemins tracés et semés d'embûches capable de perdre la voyageuse la plus aguerrie.

Pour ce premier voyage dans les plaines de l'analyse fonctionnelle, il est plus simple de rester dans les espaces de dimension infinie les plus simples possibles : *les espaces de Hilbert*, bien taillés pour ce premier voyage, puisque nous allons vite nous rendre compte qu'il n'existe qu'un seul espace de Hilbert à isométrie près.

Mais avant d'entrer dans le vif du sujet, il est nécessaire de doter l'espace d'une métrique particulière, qui vérifie de bonnes propriétés. En particulier, on souhaite que cette métrique :

— permette d'avoir un concept d'angle entre les vecteurs ;

— permette de retrouver de nombreuses propriétés des espaces de dimension finie.

Au fil des années, les mathématiciennes ont fait émerger le concept de produit hermitien.

Définition 5.1 (Produit hermitien / Produit scalaire)**.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un PRODUIT HERMITIEN sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ telle que

1. Pour tout $x \in E$, l'application $\langle x, \cdot \rangle : E \to \mathbb{K}$ est linéaire.
2. Pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$. De plus, on a $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un ESPACE PRÉHILBERTIEN est un espace vectoriel E muni d'un produit hermitien sur E. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dira alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un PRODUIT SCALAIRE.

Définition 5.2 (Norme hermitienne)**.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. L'application $x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est une norme sur E. On dit dans ce cas qu'il s'agit d'une NORME HERMITIENNE.

Lorsque l'on arrive dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$, il est assez raisonnable de se demander si sa norme peut-être définie par un produit scalaire/hermitien. La proposition suivante donne un résultat particulièrement utile :

Pour connaître un produit scalaire, il suffit de connaître la norme de l'espace.

Proposition 5.3. **(Identité de polarisation)**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ un espace préhilbertien réel. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)}\,.$$

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ est un espace préhilbertien complexe, alors on a pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2)}\,.$$

Proposition 5.4. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle)} \ .$$

De plus, un produit hermitien est un objet assez rigide. En particulier, il ne peut pas exploser puisqu'il est sans cesse contrôlé par la norme de ses éléments comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.5. **(Cauchy–Schwarz)** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ un espace préhilbertien, alors

$$\boxed{\forall x \in E \ , \ \ \forall y \in E \ , \ \ |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|} \ .$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

5.2 Les défis du jour

Exercice 5.1. [solution] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, a un vecteur unitaire de E, k un réel et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\phi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle \ .$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 5.2. [solution] Soit E un espace préhilbertien.

1. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\overline{B_E}(0, 1)$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.
2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle x_n, x \rangle = \|x\|^2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Démontrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.
3. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.
   (b) $\forall y \in E$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

6 Jour 6 – Espaces de Hilbert : Théorème de projection

6.1 Rappels de cours

Définition 6.1. Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{H}}$ et de la norme associée $\| \cdot \|_{\mathscr{H}}$. On dit que $\mathscr{H}$ est un ESPACE DE HILBERT si c'est un espace complet pour la distance $d_{\mathscr{H}}$ associée à la norme.

Bien sûr, la voyageuse pourrait se demander pourquoi est-ce que les espaces de Hilbert sont bien taillés pour faire de l'analyse fonctionnelle. En fait, toute la magie des espaces de Hilbert est liée au fait que l'on possède un théorème d'existence très puissant : *le théorème de la projection orthogonale*.

Théorème 6.2. **(Projection orthogonale sur un sous-espace fermé)**
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe et soit $F \subset \mathscr{H}$ un sous-espace fermé, non réduit à $\{0\}$. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, il existe un unique vecteur $v := \pi_F(x) \in F$ qui réalise la distance de x à F, c'est à dire tel que

$$\boxed{d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|}.$$

Ce vecteur est caractérisé par la condition $\boxed{\langle v - x, y\rangle = 0}$ pour tout $y \in F$, *i.e.* $\boxed{(v - x) \in F^\perp}$.

De plus, l'application $\pi_F : \mathscr{H} \to F$ est linéaire, continue et de norme 1.

De ce théorème découle l'essentiel des propriétés des espaces de Hilbert, à savoir :
— *Le théorème de représentation de Riesz* : Toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert peut s'écrire comme un produit scalaire par un vecteur de l'espace.
— *L'existence de bases hilbertiennes* qui permet de généraliser la notion de base algébrique utilisée dans des espaces de dimension finie, et d'avoir une série d'étudier un vecteur en regardant ce qu'il vaut contre une base.

6.2 Les défis du jour

Exercice 6.1. [solution] On considère l'espace $E = (\mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ et D la droite engendrée par $x \mapsto x - 1$. Montrer que la distance de D à la fonction $x \mapsto 1$ est atteinte en plusieurs points. Pourquoi est-ce que cela ne contredit pas le théorème de projection orthogonale ?

Exercice 6.2. [solution] Soit E un sous–espace vectoriel d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$.

Montrer que $E \subset (E^\perp)^\perp$, et que $(E^\perp)^\perp = E$ si et seulement si E est fermé.

Dans le prochain exercice, nous vous proposons de redémontrer le théorème de projection sur une partie convexe et fermée.

Exercice 6.3. [solution] **(Théorème de projection sur une partie convexe et fermée)**
Soit H un espace de Hilbert, et soit $C \subset H$ une partie convexe, fermée et non vide.

1. Énoncer l'identité du parallélogramme.
2. Soit $x \in \mathscr{H}$. Pour tout $n \geq 1$, montrer qu'il existe $z_n \in C$ tel que
$$\|x - z_n\|^2 \leq d(x, C)^2 + \frac{1}{n}\ .$$
3. En déduire l'existence d'un élément $z \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - z\|$.
Indication : On pourra démontrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
4. Montrer que cet élément z est unique. On dit que $z = P_C(x)$ est la projection orthogonale de x sur C.
5. Montrer que
$$\forall y \in C\ ,\ \ \Re\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0.$$

7 Jour 7 – Espaces de Hilbert : Représentation du dual

7.1 Rappels de cours

L'une des conséquences les plus spectaculaires du théorème de projection orthogonale, c'est qu'il permet de décrire de manière simple le dual d'un espace hilbertien. Ce résultat est connu comme le théorème de Riesz.

Théorème 7.1. **(Théorème de Riesz)**

Toute forme linéaire continue φ sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme d'un produit scalaire contre un élément fixe, *i.e.*

$$\boxed{\exists! v \in \mathscr{H}\ ,\ \ \forall u \in \mathscr{H}\ ,\ \ \varphi(u) = \langle v, u\rangle}\ ,$$

et

$$\boxed{\|\varphi\| = \|v\|_{\mathscr{H}}}\ .$$

Ce théorème est particulièrement important : en effet, il s'agit d'un théorème d'existence et ces derniers sont particulièrement importants en mathématiques. Par exemple le théorème de Riesz permet de garantir l'existence de l'adjoint d'un opérateur.

Théorème 7.2. Soit $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux espaces de Hilbert, A une application linéaire continue de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{H}$. Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{G})$ telle que

$$\boxed{\forall u \in \mathscr{G}\ ,\ \ \forall v \in \mathscr{H}\ ,\ \ \langle Au, v\rangle_{\mathscr{H}} = \langle u, A^* v\rangle_{\mathscr{G}}}\ .$$

et

$$\boxed{\|A\| = \|A^*\|}\ .$$

L'application A^* est appelée l'application ADJOINTE de A.

La prochaine proposition donne quelques résultats utiles sur les opérateurs adjoints qu'il peut être utile de garder en tête.

Proposition 7.3. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Alors

1. $(\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^*$;
2. $\overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp$.

7.2 Les défis du jour

Exercice 7.1. [solution] Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert.

1. Si la boule unité fermée $\overline{B_{\mathscr{H}}}$ est compacte, montrer que $\mathscr{H}$ est de dimension finie.

2. Supposons que $\mathscr{H}$ est de dimension infinie. Soit $\mathscr{E} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$ une famille orthonormée. Montrer que $\mathscr{E}$ est un fermé borné non compact de $\mathscr{H}$.

Le prochain exercice est une conséquence particulièrement importante du théorème de représentation de Riesz. Il s'agit ici de démontrer le théorème de Lax-Milgram [1], un théorème incontournable que l'on utilise énormément à partir du M1 pour démontrer l'existence de solutions pour certains types d'EDPs.

Exercice 7.2. [solution] **(Théorème de Lax-Milgram)**

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel et $a : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive, *i.e.*

$$\exists \alpha, C \in]0, +\infty[\ ,\ \ \forall (x,y) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}\ ,\ \ |a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \text{et} \quad a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2\ .$$

et φ une forme linéaire continue sur $\mathscr{H}$. On veut montrer qu'il existe un unique $x \in \mathscr{H}$ tel que

$$\forall y \in \mathscr{H}\ ,\ \ a(x,y) = \varphi(y)\ .$$

1. Expliquer pourquoi ce théorème peut être vu comme une généralisation du théorème de représentation de Riesz.
2. Soit $x \in \mathscr{H}$. Démontrer qu'il existe un unique élément $a_x \in \mathscr{H}$ tel que
$$\forall y \in \mathscr{H}\ ,\ \ a(x,y) = \langle a_x, y\rangle\ .$$
3. Désormais on note $a_x = T(x)$. Démontrer que l'application $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est linéaire.
4. Démontrer que : $\forall x \in \mathscr{H}\ ,\ \ \alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C\|x\|$.
5. Démontrer que T est injective.
6. Démontrer que $T(\mathscr{H})^\perp = \{0\}$.
7. Démontrer que $T(\mathscr{H})$ est fermé.
8. En déduire que T est surjective.
9. En déduire le théorème le Lax-Milgram.

8 Jour 8 – Espaces de Hilbert : Bases hilbertiennes

8.1 Rappels de cours

Définition 8.1 (Base hilbertienne)**.** Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Une BASE HILBERTIENNE de $\mathscr{H}$ est une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ telle que $\mathscr{H} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i;\ i \in I\}}$.

Définition 8.2 (Séparable)**.** Un espace métrique est SÉPARABLE lorsqu'il contient une partie dénombrable dense.

Proposition 8.3. Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne dénombrable.

Proposition 8.4. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de $\mathscr{H}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.
2. **L'égalité de Parseval** : pour tout $x \in \mathscr{H}$, on a
$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2}\,.$$
3. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, la suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n$ est convergente et
$$\boxed{x = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n}\,.$$

8.2 Les défis du jour

Exercice 8.1. [solution] Démontrer que tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne dénombrable.

Exercice 8.2. [solution] Soit $(\mathscr{H}, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

1. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de $\mathscr{H}$ et $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Montrer que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^* f_n\|^2$$
2. En déduire que la quantité définie par
$$\|A\|_{HS} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
ne dépend pas du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ fixée. On dit que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si $\|A\|_{HS} < +\infty$. On note $HS(\mathscr{H})$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Montrer que $\|\cdot\|_{HS}$ définie une norme sur $HS(\mathscr{H})$ et que l'on a
$$\|A\|_{HS} \geq \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}.$$
4. Si A et B sont deux opérateurs continus de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, montrer que l'opérateur $A \circ B$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt dès que l'un des opérateurs A ou B est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
5. Montrer $HS(\mathscr{H})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{HS}$ est un espace de Hilbert.

9 Jour 9 – Espaces de Hilbert : Critère de densité

9.1 Rappels de cours

Pour démontrer qu'une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne, il faut être en mesure de démontrer que $\mathrm{Vect}\{e_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathscr{H}$. Heureusement, les espaces de Hilbert sont des espaces faciles à manier où l'on peut trouver un critère de densité particulièrement facile à mettre en oeuvre.

Proposition 9.1. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et A un sous-espace de H. Alors A est dense dans $\mathscr{H}$ si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.

Un autre avantage des espaces de Hilbert, c'est qu'on y trouve énormément de théorèmes de densité :
- les fonctions étagées sont denses dans L^p ;
- les fonctions de classe C^k à support compact sont denses dans L^p.

Proposition 9.2. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Alors l'ensemble des fonctions étagées μ–intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.

Proposition 9.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Alors pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace vectoriel $\mathscr{C}_c^k(\Omega)$ des fonctions réelles de classe C^k, à support compact inclus dans Ω est dense dans $L^p(\Omega, \lambda)$.

9.2 Les défis du jour

Exercice 9.1. [solution] Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier par

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \ \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt}\,\mathrm{d}x\ .$$

1. Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie et que c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que lorsque $t \to \pm\infty$, $\widehat{f}(t) \to 0$.

10 Jour 10 – L'art de la convolution

10.1 Rappels de cours

Dans le monde des mathématiques, la quantité

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y$$

où f et g sont deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$, apparaît naturellement.

Dès lors il est important de savoir quand la convolution est bien définie. La proposition suivante donne une série de situations où c'est le cas :

Théorème 10.1. Soit $d \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

1. Soient f et g deux fonctions boréliennes positives. Alors $f * g$ est bien définie.
2. Soient (p, q, r) un triplet de $[1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors, $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ et
$$\boxed{\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q} .$$
En particulier :
   (a) si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ où $p \in [1, \infty]$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est bien définie et
$$\boxed{\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p} ;$$
   (b) si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ où p et q sont des réels conjugués, *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et
$$\boxed{\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q} .$$

10.2 Les défis du jour

Exercice 10.1. [solution] Soit $a \geq 1$ un réel. Soient $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $g = \mathbb{1}_{[-a,a]}$. Justifier l'existence du produit de convolution $f * g$ et calculer ce produit.

En pratique, la convolution est un outil particulièrement utile, mais il prend tout son sens lorsqu'on le combine à la transformée de Fourier, puisque cette dernière permet de transformer un produit de convolution en un produit de fonctions.

Exercice 10.2. [solution] **(Fourier et convolution)** Pour toute application $f \in L^1(\mathbb{R})$, on rappelle que la transformée de Fourier de f est l'application $\mathscr{F} f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par
$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad \mathscr{F} f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x .$$
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Démontrer que l'application $\mathscr{F}(f * g)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que
$$\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F} f \cdot \mathscr{F} g .$$

11 Jour 11 – Exercice de révision (1/3)

Exercice 11.1. [solution] **(Approximation de l'unité)** Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R})$. On dit que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une APPROXIMATION DE L'UNITÉ si :

(i) Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$ et
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = 1 .$$

(iii) Pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|>\delta\}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Q°1) Démontrer qu'il existe une approximation de δ_0.

Q°2) Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n * f = f$, uniformément sur tout compact.

Q°3) Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbb{R})$ où $p \in [1, +\infty[$. Démontrer que $\varphi_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ lorsque $n \to +\infty$.

Q°4) *(Application : Théorème de Weierstraß)* On considère la suite de fonctions $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$\varphi_n(x) = c_n(1-x^2)^n \mathbb{1}_{|x|\leq 1}\ ,$$

où $c_n = \dfrac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}$.

(a) Démontrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, à support dans $I =]-1/2, 1/2[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f * \varphi_n$ est un polynôme sur I.

(c) En déduire le théorème de Weierstraß : *soient K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{C}$ une fonction continue, alors f est la limite uniforme d'une suite de polynôme.*

12 Jour 12 – Exercice de révision (2/3)

Exercice 12.1. [solution] **(Lemme fondamental du calcul des variations)**

On note $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions localement intégrables, *i.e.* pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$,

$$\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\ .$$

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})\ ,\quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0\ . \tag{H}$$

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ telle que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

(ii) Il existe une suite de réels $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_n \leq 1$ et $\lim_{n\to\mathbb{N}} \varepsilon_n = 0$ telle que $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$.

Q°1) Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
Rappel : la lectrice pourra trouver la définition et les principales propriétés d'une approximation de l'unité dans l'exercice 11.1

Q°2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\varphi_n * f = 0$.

Q°3) Soit a un réel strictement positif. Soit $b = 1 + a$. Montrer que pour tout réel x tel que $|x| \leq a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n * f(x) = \varphi_n * \left[\mathbb{1}_{[-b,b]} f\right](x) = 0 \ .$$

Q°4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|\mathbb{1}_{[-b,b]} f - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)\|_1 \geq \int_{-a}^{a} |f(x)| \, \mathrm{d}x \ .$$

Q°5) En déduire que $f = 0$ presque partout.

13 Jour 13 – Exercice de révision (3/3)

Exercice 13.1. [solution] **(Espace de Sobolev)** Dans cet exercice, $L^2(]0,1[)$ représente l'ensemble des fonctions de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathscr{S} \subset L^2(]0,1[)$ le sous–espace vectoriel réel constitué des fonctions $f :]0,1[\to \mathbb{R} \in L^2(]0,1[)$ pour lesquelles il existe une fonction $\Lambda_f \in L^2(]0,1[)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[;\mathbb{R}) \ , \ \int_0^1 f(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \Lambda_f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \ . \qquad (\star)$$

On dit que Λ_f est la DÉRIVÉE FAIBLE de f, ou encore LA DÉRIVÉE DE f AU SENS DES DISTRIBUTIONS.

Q°1) Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-ensemble dense de $L^2(]0,1[)$.

Q°2) Soit $f \in \mathscr{S}$. Démontrer que Λ_f est unique.

Q°3) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}$.

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{S}} = \int_0^1 f(x)g(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \Lambda_f(x)\Lambda_g(x) \, \mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{S}$.

Q°4) Montrer que $(\mathscr{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{S}})$ est un espace de Hilbert.

14 Corrigés des exercices

Solution 1.1. [énoncé]

1.

> **Point méthode 2.** Ici, on déroule tranquillement critère pratique. On cherche donc à obtenir une majoration de $|\delta_0(f)|$ par un terme de la forme $M\|f\|_\infty$.

Soit $f \in E$. On voit que f est une application continue définie sur un ensemble compact. Il s'ensuit qu'elle admet un maximum $\|f\|_\infty$. Par suite,

$$|\delta_0(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty.$$

ce qui assure que δ_0 est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ et que $\|\delta_0\| \leq 1$.

2.

Point méthode 3. Pour montrer qu'une application linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés n'est pas continue, on cherchera généralement à construire une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{\|T(f_n)\|_F}{\|f_n\|_E} = +\infty$.

Essayons de construire une bonne suite $(f_n)_{n\geq 0}$. Comme l'opérateur δ_0 amène toute la masse de f en 0, on est tenté de construire une suite de fonctions continues, d'intégrale 1 avec de plus en plus de masse en 0.

Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = \begin{cases} -2n^2x + 2n & \forall x \in [0, 1/n] \\ 0 & \forall x \in [1/n, 1] \end{cases}$. Ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|dx = 1$.

Par ailleurs, on observe que $|\delta_0(f_n)| = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\delta_0(f_n)|}{\|f_n\|_1} = +\infty$$

ce qui assure que δ_0 n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Solution 1.2. [énoncé]

Point méthode 4. On veut démontrer qu'une application linéaire est continue, donc on déroule tranquillement le critère pratique. On cherche à obtenir une majoration de $\|T(f)\|_F = \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty$ par un terme de la forme $M\|f\|_\infty$.

Soit $f \in E$. De part le théorème fondamental de l'analyse, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continuement dérivable, donc T est bien défini et $T(f)' = f$.

Dès lors, nous essayons d'obtenir notre majoration. Soit $f \in E$,

$$\|T(f)\|_F \leq \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty \leq x\|f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty .$$

On peut donc conclure que T est continu et que $\|T\| \leq 2$. Il est facile de voir que $\|T\| = 2$ en prenant f constante.

Solution 1.3. [énoncé]

1.

Point méthode 5. Nous voulons montrer qu'une application est bien définie et continue. Notre méthode ne change pas, nous allons majorer $\|f(u)\|_1$ par un terme $M\|u\|_1$.

Ici, la linéarité de l'opérateur s'obtient facilement à l'aide de la linéarité de la somme.

Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, on a

$$\|f(u)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big| \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)}_{\leq 1} u_n \Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1 \ .$$

Donc l'application est bien définie, continue et $\|f\| \leq 1$.

Point clé 1. La situation maintenant est un petit peu plus délicate. Nous voulons démontrer que $\|f\| = 1$. Cependant, ici cette norme n'est jamais atteinte (cf. question 2). Nous allons donc démontrer que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe un élément $u \in \ell_1$ tel que $\|f(u)\| > \alpha\|u\|_1$ ce qui permettra de conclure que $\|f\|_1 \geq 1$.

Soit $\alpha < 1$ et soit $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha < 1 - \frac{1}{n_\alpha+1} < 1$.
On définit la suite $u^\alpha = (u_n^\alpha)_{n\geq 0}$ où pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n^\alpha = 1$ si $n = n_\alpha$ et $u_n = 0$ sinon.

On a $\|f(u^\alpha)\|_1 = 1 - \frac{1}{n_\alpha+1} \geq 1 - \alpha = (1-\alpha)\|u^\alpha\|_1$.
Donc $\|f\| \geq 1$. On peut donc conclure que $\|f\| = 1$.

2. Nous allons démontrer qu'un tel élément u n'existe pas. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ non nul. Soit u_{n_0} le premier terme non nul de u. Alors $|(1 - \frac{1}{n_0+1})u_{n_0}| < u_{n_0}$. Par suite

$$\|f(u)\|_1 = \Big|(1 - \frac{1}{n_0+1})u_{n_0}\Big| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Big|\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)u_n\Big| \leq \Big|(1 - \frac{1}{n_0+1})u_{n_0}\Big| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n|$$
$$< |u_{n_0}| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1 \ .$$

Il s'ensuit que $\|f(u)\|_1 < \|u\|_1$.

Solution 2.1. [énoncé]

Point méthode 6. Ici, nous voulons contrôler le terme $\mu(X)^2$. Comme nos outils permettent uniquement de majorer des intégrales, nous allons donc écrire $\mu(X)$ sous la forme d'une intégrale.

On a

$$\mu(X)^2 = \left(\int_X 1 d\mu\right)^2 \leq \left(\int_X \sqrt{fg} d\mu\right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_X \sqrt{fg} d\mu\right) \leq \left(\int_X f d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_X g d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de conclure que

$$\mu(X)^2 \leq \int_X f d\mu \int_X g d\mu \ .$$

Solution 2.2. [énoncé]

1. Il est facile de voir ici que $q < 0$.
2.

Point méthode 7. Nous voulons établir une inégalité qui ressemble à celle de Hölder. Notre méthode va donc d'essayer d'appliquer la version classique du théorème de manière à faire apparaître l'inégalité demandée.

On a
$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = \int_{\mathbb{R}} |fg|^p \times |g|^{-p} d\mu \tag{2}$$
Soit $r = \frac{1}{p}$ et soit $s = \frac{1}{1-p}$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.
En appliquant l'inégalité de Hölder on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|fg|^p)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \times \left(\int_{\mathbb{R}} (|g|^{-p})^s d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|fg|^p)^{\frac{1}{p}} d\mu \right)^{p} \times \left(\int_{\mathbb{R}} (|g|^{-p})^{\frac{1}{1-p}} d\mu \right)^{1-p} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu \right)^{p} \times \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{\frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{1-p} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu \right)^{p} \times \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{q} d\mu \right)^{1-p}
\end{aligned}$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance $\frac{1}{p}$, on obtient que

$$\|f\|_p \leq \|fg\|_1 \times \frac{1}{\|g\|_q}$$

et donc $\|f\|_p \|g\|_q \leq \|fg\|_1$.

Solution 3.1. [énoncé]

1. L'inégalité de Hölder permet d'écrire que $\|a * b\|_\infty \leq \|a\|_1 \|b\|_\infty$.
2. Soit $u, v \in \ell^\infty$. On observe par linéarité de la somme que

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty = \|a * (u - v)\|_\infty \leq \|a\|_1 \|u - v\|_\infty \ .$$

Comme on sait que $\|a\|_1 < 1$, il s'ensuit que T est une contraction stricte.

3.

Point méthode 8. Ici, nous voulons montrer qu'un opérateur T admet un unique point fixe. Les espaces de Banach sont parfaits pour cela. Il suffit juste de s'assurer que toutes les hypothèses du théorème de point fixe de Picard sont vérifiées.

On constate que T est un contraction stricte du Banach l^∞ dans lui-même. Le résultat demandé est une conséquence immédiate du théorème de point fixe.

Solution 3.2. [énoncé]

Point méthode 9. Dans cet exercice, nous souhaitons extraire une suite (y_k) dont la série de terme général $(y_{k+1} - y_k)$ converge. Pour cela, nous allons majorer $|y_{k+1} - y_k|$ par le terme d'une série convergente à l'aide du critère de Cauchy sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après le critère de Cauchy, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $N_k > 0$ tel que pour tout entier $p, q \geq N_k$, $|x_p - x_q| \leq \frac{1}{2^k}$.
Sans perte de généralité, nous pouvons supposons que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En posant $y_k = x_{N_k}$, on a

$$|y_{k+1} - y_k| = |x_{N_{k+1}} - x_{N_k}| \leq \frac{1}{2^k} .$$

Par critère de comparaison pour les séries positives, on en déduit que la série de terme général $(y_{k+1} - y_k)$ converge.

Solution 4.1. [énoncé]

Point méthode 10. Ici nous voulons montrer que la fonction f^2g est intégrable, *i.e.* que nous voulons majorer la quantité $\int_{\mathbb{R}} |f^2g|dx$. Pour ce faire, nous allons tenter d'appliquer l'inégalité de Hölder.

Posons $p = \frac{3}{2}$ et $q = 3$. Ce sont bien des nombres conjugués car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |f^2g|dx \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} (f^2)^{\frac{3}{2}} dx\Big)^{\frac{2}{3}} \times \Big(\int_{\mathbb{R}} g^3 dx\Big)^{\frac{1}{3}} < \infty . \tag{3}$$

Solution 4.2. [énoncé]

1. L'inégalité de Hölder permet d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^x |f(t)|dt &= \int_0^x |f(t)| \times 1dt \\ &\leq \Big(\int_0^x |f(t)|^p\Big)^{1/p} \Big(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \Big(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p\Big)^{1/p} x^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que l'application F est bien définie.

2. Dans la question précédente, nous avons montré que

$$\int_0^x |f(t)|dt \leq \Big(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p\Big)^{1/p} x^{\frac{p-1}{p}} ,$$

   ce qui assure que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^{(p-1)/p})$.

3. Nous allons démontrer que $\lim_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt = 0$ ce qui permettra de conclure.
   Pour cela, on applique le théorème de convergence dominée. Posons $f_a(t) = \mathbb{1}_{[a,+\infty]}|f(t)|^p$. Alors

- $f_a \to 0$, p.p.
- Pour tout $a > 0, |f_a| \leq |f|^p \in L^p(\mathbb{R})$.

Le théorème de convergence dominée assure donc que $\lim_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt = 0$.

4. Donnons nous $\varepsilon > 0$ et $a > 0$ comme dans la question précédente.

Point méthode 11. La question précédente nous laisse penser ici qu'il peut être utile de décomposer F en deux intégrales.

Soit $x > a$. Alors

$$\begin{aligned}|F(x) - F(a)| &\leq \int_a^x |f(t)|dt \\ &\leq \left(\int_a^x |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^x 1^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \varepsilon x^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{|F(x)|}{x^{(p-1)/p}} \leq \varepsilon + \frac{|F(a)|}{x^{(p-1)/p}}.$$

En prenant x assez grand, on voit donc que

$$\frac{|F(x)|}{x^{(p-1)/p}} \leq 2\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

Solution 4.3. [énoncé]

Ici, nous traitons en même temps les questions (1) et (2).

La conclusion est immédiate lorsque $p = +\infty$.

► Supposons pour commencer que $p = 1$. On note $F(x, y) = f(x - y)g(y)$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|dx = |g(y)|\|f\|_1 < +\infty ,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dxdy \leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \leq \|f\|_1\|g\|_1 .$$

Il s'ensuit que $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$. En appliquant le théorème de Fubini, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dy < \infty, \text{ p.p}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dydx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dxdy \leq \|f\|_1\|g\|_1$$

► Désormais, considérons que $1 < p < +\infty$. Soit q le réel conjugué avec p.
D'après le point précédent, on sait que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ est dans $L^p(\mathbb{R})$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \times |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q}.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance p, on obtient que

$$|f * g(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x)\|f\|_1 \; .$$

En appliquant le cas $p = 1$, on voit que $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1\|g\|_p^p\|f\|_1^{p/q} = \|f\|_1^p\|g\|_p^p.$$

Solution 5.1. [énoncé]

Par définition, ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E (ceci résulte du fait que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E).

Reste à trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit définie positive.
Soit $x \in E$, alors

$$\phi(x,x) = \|x\|^2 + k\langle x,a\rangle^2 \; . \qquad (\star)$$

> **Point clé 2.** Puisqu'on veut montrer que ϕ est définie positive, nous allons tester le cas particulier où $x = a$ afin de pouvoir profiter du caractère défini positif du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

En choisissant $x = a$, on obtient

$$\phi(a,a) = \|a\|^2 + k\langle a,a\rangle^2 = \|a\|^2 + k\|a\|^4 = 1 + k \; .$$

Pour que ϕ soit définie positive, il est donc nécessaire d'avoir $\boxed{1 + k > 0}$.

Réciproquement, supposons que $1 + k > 0$, *i.e.* $k > -1$. En utilisant $(\star)$, on observe que

$$\forall x \in E\backslash\{0_E\} \; , \; \; \|x\|^2 - \langle x,a\rangle^2 < \|x\|^2 + k\langle x,a\rangle^2 = \phi(x,x) \; .$$

Cependant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que

$$\langle x,a\rangle^2 \leq \|x\|^2\|a\|^2 = \|x\|^2 \; .$$

Il s'ensuit que $\|x\|^2 - \langle x,a\rangle^2 \geq 0$ ce qui assure que $\phi(x,x) > 0$, et donc que ϕ est définie positive. (Par définition, on a bien $\phi(0,0) = 0$).

In fine, ϕ est un produit scalaire si, et seulement si, $1 + k > 0$.

Solution 5.2. [énoncé]

1.

Point clé 3. Ici, on cherche à établir un résultat sur la norme d'éléments à partir d'informations sur leur produit scalaire. Dans ce genre de situation, un bon réflexe consiste à revenir aux identités de polarisation, ou à l'égalité $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|x_n - y_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\langle x_n, y_n\rangle$.
Puisque par hypothèse, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{B_E}(0,1)^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{B_E}(0,1)^{\mathbb{N}}$, on a

$$\|x_n - y_n\|^2 \leq 2 - 2\langle x_n, y_n\rangle$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|^2 \leq 2 - 2 \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = 0$$

ce qui assure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle$.
Comme $(\langle x_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x\|^2$ et que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|x\|$.
Il s'ensuit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|^2 = 0}.$$

3.

Point méthode 12. Pour démontrer ici les convergences demandées, on va chercher coûte que coûte à majorer la norme de la différence entre la suite et sa limite. Pour cela, on dispose de deux outils formidables :

— l'inégalité de Cauchy Schwarz ;

— l'inégalité triangulaire.

Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, *i.e.* $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|x_n - x\| = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y\|.$$

De même, l'inégalité triangulaire assure que

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

Par suite, quand $n \to +\infty$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|} = 0$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} |\|x_n\| - \|x\||} = 0$.

Réciproquement, supposons que

$$\forall y \in E, \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\| .$$

En prenant $y = x$, la question (2) permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = x}$.

Solution 6.1. [énoncé]

Point méthode 13. Pour démontrer que la distance de D à $x \mapsto 1$ peut être atteinte en plusieurs points, on va commencer par calculer la distance de $x \mapsto 1$ à un point fixé de D, chercher un minimum de cette distance et puis montrer que ce minimum est atteint en plusieurs points.

Considérons les éléments de E, $c : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x - 1$. Par définition,

$$D = \{f_\lambda : x \mapsto \lambda x - \lambda \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $g_\lambda = c - f_\lambda$.

Notons d la distance sur E associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par définition

$$d(c, D) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} d(c, f_\lambda) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|c - f_\lambda\|_\infty = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \sup_{x\in[-1,1]} |g_\lambda(x)| . \tag{$\star$}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, g_λ est une application affine définie sur un compact. Il s'ensuit que

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} , \quad \sup_{x\in[-1,1]} |g_\lambda(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |g_\lambda(x)| = \max(|g_\lambda(-1)|, |g_\lambda(1)|) = \max(|1 + 2\lambda|, 1) \geq 1 .$$

En combinant cette dernière inégalité avec $(\star)$ on obtient que

$$d(c, D) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \sup_{x\in[-1,1]} |g_\lambda(x)| \geq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} 1 = 1 .$$

Il reste à montrer maintenant qu'il existe au moins deux éléments de D pour lesquels cette distance est atteinte.
Prenons $\lambda = 0$. Alors $d(f_0, c) = \|c - f_0\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |c(x) - f_0(x)| = 1$.
Prenons $\lambda = -\frac{1}{2}$. Alors $d(f_{-1/2}, c) = \|c - f_{-1/2}\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}| = 1$.

Conclusion : La distance de D à la fonction $x \mapsto 1$ est atteinte en plusieurs points, par exemple en f_0 et $f_{-1/2}$.

Il reste donc à comprendre pourquoi cette observation ne contredit pas le théorème de projection orthogonale.
En effet, une lecture rapide du problème pourrait nous laisser penser que le théorème de projection orthogonale est contredit ici : D est bien un sous-espace fermé de E, on pourrait donc s'attendre à avoir unicité du projeté orthogonal sur D.
Un tel raisonnement, cependant, est faux. Pour pouvoir appliquer le théorème de projection orthogonale il est indispensable de se trouver dans le monde des espaces de Hilbert. Or, E n'est pas un espace de Hilbert puisque la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas associée à un produit scalaire. Ce dernier point est un résultat classique que la lectrice aura tout intérêt à vérifier par elle-même.

Solution 6.2. [énoncé]

Soit $x \in E$, pour tout $y \in E^\perp$, on a $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui assure que $x \in (E^\perp)^\perp$ et donc $E \subset (E^\perp)^\perp$.

Point clé 4. Pour démontrer que $(E^\perp)^\perp = E$ implique que E soit fermé, nous allons nous appuyer sur une observation particulièrement utile :

$$\boxed{\textit{L'orthogonal d'une partie est toujours fermé !}}$$

En effet, si A est une partie d'un espace préhilbertien E, on peut écrire

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$$

où $x^\perp = \{y : \langle x, y\rangle = 0\}$ est un fermé puisqu'il s'agit du noyau de la forme linéaire continue $y \mapsto \langle x, y\rangle$.

Posons $F = E^\perp$. Si $F^\perp = E$, alors E est fermé car l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est toujours fermé.

Réciproquement, supposons que E est fermé. Pour tout $x \in \mathscr{H}$, le théorème de projection orthogonale assure qu'il existe un unique élément $\pi_E(x) \in E$ tel que $x - \pi_E(x) \in E^\perp = F$.
Par conséquent si $x \in F^\perp$,

$$0 = \langle x, x - \pi_E(x)\rangle = \langle x - \pi_E(x), x - \pi_E(x)\rangle + \langle \underbrace{\pi_E(x)}_{\in E}, \underbrace{x - \pi_E(x)}_{\in E^\perp}\rangle = \|x - \pi_E(x)\|^2_{\mathscr{H}} \, .$$

Par séparation de la norme, $x - \pi_E(x) = 0$ ce qui assure que $x = \pi_E(x) \in E$. On a donc démontré que $F^\perp = (E^\perp)^\perp \subset E$.

Solution 6.3. [énoncé]

1. Soient E un espace préhilbertien, a et b deux éléments de E . On a
$$\boxed{\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2} \, .$$
2. Soit $x \in H$. Par définition, $d(x,C)^2 = \inf_{z \in C} d(x,z)^2$.
Par définition de l'infimum,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists z_\varepsilon \in C : d(x,C)^2 \leq d(x,z_\varepsilon)^2 < d(x,C)^2 + \varepsilon \, .$$
En particulier,
$$\forall n \geq 1, \exists z_n \in C : d(x,C)^2 \leq d(x,z_n)^2 < d(x,C)^2 + \frac{1}{n} \, .$$
Par contruction, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.
3.

Point clé 5. L'indication nous invite à montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Nous voulons donc être en mesure de contrôler la quantité $\|z_n - z_m\|$ lorsque n et m sont des entiers naturels assez grand.
Pour ce faire, on se laisse guider par la première question de l'exercice

qui nous incite à utiliser l'identité du parallélogramme.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. L'identité du parallélogramme assure que

$$\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z_n - z_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) .$$

Puisque C est une partie convexe et que $(z_n, z_m) \in C^2$, on a $\frac{z_n+z_m}{2} \in C$.
Il s'ensuit que $\left\|x - \frac{z_n+z_m}{2}\right\| \geq d(x, C)$ ce qui assure que

$$\left\|\frac{z_n - z_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(d(x, z_n)^2 + d(x, z_m)^2\right) - d(x, C)^2 .$$

Il s'ensuit que $\lim_{n,m\to+\infty} \|z_n - z_m\| = 0$ ce qui assure que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme H est un espace complet, il existe $z \in H$ tel que $\lim_{n\in\mathbb{N}} z_n = z$. De plus C est une partie fermée, ce qui assure que $z \in C$.

4.

Point clé 6. Dans cette question, on va encore chercher à utiliser l'identité du parallélogramme ainsi que la convexité de C.

Supposons qu'il existe $z \neq z'$ tels que $d(x, C) = \|x - z\| = \|x - z'\|$. Puisque C est une partie convexe, il s'ensuit que $\frac{z+z'}{2} \in C$.
L'identité du parallélogramme assure que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{z + z'}{2} - x\right\|^2 &= \left\|\frac{z - x}{2} + \frac{z' - x}{2}\right\|^2 \\ &= 2\left\|\frac{z - x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{z' - x}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{z - x}{2} - \frac{z' - x}{2}\right\|^2 \\ &= d(x, C)^2 - \left\|\frac{z - z'}{2}\right\|^2 \\ &< d(x, C)^2\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $d(x, C)^2 \leq \left\|\frac{z+z'}{2} - x\right\|^2$.

5. Soit $y \in C$.

Point clé 7. Comme C est une partie convexe, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $(1 - \lambda)y + \lambda P_C(x) \in C$.

Par homogénéité de la norme, on observe que

$$\begin{aligned}\|x - [(1 - \lambda)P_C(x) + \lambda y]\|^2 &= \|x - P_C(x) + \lambda(P_C(x) - y)\|^2 \\ &= \|x - P_C(x)\|^2 + \lambda^2\|P_C(x) - y\|^2 + \lambda\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y\rangle .\end{aligned}$$

Par définition du projeté orthogonal, on a

$$\|x - [(1 - \lambda)P_C(x) + \lambda y]\|^2 \geq d(x, C)^2 = \|x - P_C(x)\|^2 .$$

Il s'ensuit que

$$\|x - P_C(x)\|^2 \leq \|x - P_C(x)\|^2 + \lambda^2 \|P_C(x) - y\|^2 + 2\lambda \Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y\rangle \ ,$$

ce qui assure que

$$0 \leq \lambda^2 \|P_C(x) - y\|^2 + 2\lambda \Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y\rangle \ .$$

Si $\lambda \neq 0$, alors on a

$$0 \leq \lambda \|P_C(x) - y\|^2 + 2\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y\rangle \ .$$

ce qui montre que $\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y\rangle \geq -\frac{\lambda}{2}\|P_C(x) - y\|^2$. En faisant tendre $\lambda \to 0$, on obtient que

$$\Re\langle x - P_C(x), P_C(x) - y\rangle \geq 0 \ ,$$

ce qui assure que

$$\Re\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0 \ .$$

Solution 7.1. [énoncé]

1. Plaçons nous dans la situation où $\overline{B_{\mathscr{H}}}$ est compacte. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathscr{H}$ soit de dimension infinie.

> **Point clé 8.** Ici, le point clé consiste à construire une famille de vecteurs orthonormés « infinie »de $\mathscr{H}$ et montrer que l'existence d'une telle famille est contradictoire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$\mathscr{P}_n$ la propriété « il existe une famille de vecteurs orthonormés $(e_k)_{k=0\cdots n} \in \mathscr{H}^{n+1}$ ».

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- Si $n = 0$. Pour tout $x \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$, on pose $e_0 = \frac{x}{\|x\|}$. C'est bien un vecteur unitaire et donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et quelconque tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Comme $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, il existe un élément $x \in \mathscr{H}$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(e_k,\ k \in [\![0, n]\!])$.
  Comme $\mathrm{Vect}(e_k,\ k \in [\![0, n]\!])$ est un sous-espace de dimension finie, il est fermé.
  Le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace fermé assure qu'il existe un unique élément $\pi(x) \in \mathrm{Vect}(e_k,\ k \in [\![0, n]\!])$ tel que $x - \pi(x) \in \mathrm{Vect}(e_k,\ k \in [\![0, n]\!])^\perp$.
  Soit $e_{n+1} = \frac{x - \pi(x)}{\|x - \pi(x)\|}$. Par construction, la famille $(e_k)_{k=0\cdots n+1}$ est une famille orthonormée, et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Nous avons donc démontré qu'il existe une famille de vecteurs orthonormés $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, e_n est dans $\overline{B_{\mathscr{H}}}$. Comme $\overline{B_{\mathscr{H}}}$ est une partie compacte, on peut extraire une suite $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $e \in B_{\mathscr{H}}$.

Par continuité du produit scalaire *(ref. feuille de TD1 exo 14)*.

$$\lim_{n\to+\infty}\langle e_{\varphi(n)}, e_{\varphi(n+1)}\rangle = \langle e, e\rangle = \|e\|^2 .$$

Néanmoins, comme la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \langle e_{\varphi(n)}, e_{\varphi(n+1)}\rangle = 0$.
Il s'ensuit que $\|e\| = 0$.
Cependant, on obtient par continuité de la norme que $\|e\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|e_{\varphi(n)}\| = 1$, ce qui mène à une contradiction.

2. $\mathscr{H}$ est un espace de dimension infinie. Comme les vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthonormés, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|e_n\| = 1$ et donc $\mathscr{E}$ est une partie bornée.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un élément $u \in \mathscr{H}$.

   Point clé 9. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui assurera que $u \in \mathscr{E}$ et donc que $\mathscr{E}$ est fermé.

   Par continuité de la somme $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Il s'ensuit qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n \geq N \implies \|u_{n+1} - u_n\| \leq 1 . \qquad (\star)$$

   Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang. Alors il existe $n_0 > N$ tel que $u_{n_0} \neq u_{n_0+1}$. Or, les vecteurs u_{n_0} et u_{n_0+1} sont unitaires et orthogonaux puisqu'ils sont dans $\mathscr{E}$. Donc

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 = \|u_{n+1}\|^2 + \|u_n\|^2 - 2\langle u_{n+1}, u_n\rangle = 2$$

   ce qui contredit $(\star)$. Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Par conséquent, il existe un entier n_0 tel que $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$ et donc ce qui garantit que

$$u = \lim_{n\to+\infty} u_n = u_{n_0} \in \mathscr{E} .$$

   $\mathscr{E}$ est donc un fermé de $\mathscr{H}$.

   Il reste donc à voir que $\mathscr{E}$ n'est pas compact. Par l'absurde, si $\mathscr{E}$ était compact, on pourrait extraire de la suite $(e_n)_{n\in\mathscr{E}}$ une suite convergente $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$. Le raisonnement précédent assure que $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang ce qui est absurde. Donc $\mathscr{E}$ n'est pas compact.

Solution 7.2. [énoncé]

1. Le théorème de Lax-Milgram affirme que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert s'écrit de manière unique sous la forme d'une forme bilinéaire, continue et coercive contre un vecteur.
   Le théorème de Riesz est donc un cas particulier du théorème de Lax-Milgram lorsque la forme bilinéaire choisie est le produit scalaire.

2. Soit $x \in \mathscr{H}$. L'application $y \mapsto a(x, y)$ est une forme linéaire, continue sur $\mathscr{H}$. Le théorème de représentation de Riesz assure qu'il existe un unique élément $a_x \in \mathscr{H}$ tel que

$$\forall y \in \mathscr{H} \ , \ \ a(x, y) = \langle a_x, y \rangle \ .$$

3. Soient $(x_1, x_2) \in \mathscr{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   La question (2) assure qu'il existe un unique élément $T(x_1 + \lambda x_2) \in \mathscr{H}$ tel que

$$\forall y \in \mathscr{H} \ , \ \ \langle T(x_1 + \lambda x_2), y \rangle = a(x_1 + \lambda x_2, y) \ .$$

   La bilinéarité de $a(\cdot, \cdot)$, la définition de T et la bilinéarité du produit scalaire assurent que pour tout $y \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned} \langle T(x_1 + \lambda x_2), y \rangle &= a(x_1 + \lambda x_2, y) \\ &= a(x_1, y) + \lambda a(x_2, y) \\ &= \langle T(x_1), y \rangle + \lambda \langle T(x_2), y \rangle \\ &= \langle T(x_1) + \lambda T(x_2), y \rangle \ . \end{aligned}$$

   Par identification, $T(x_1 + \lambda x_2) = T(x_1) + \lambda T(x_2)$ ce qui assure que T est une application linéaire.

4. Soit $x \in \mathscr{H}$. Par définition de la norme,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle \ .$$

   La question (2), et la continuité de a assurent que

$$\|T(x)\|^2 = |a(x, T(x))| \leq C\|x\|\|T(x)\| \ .$$

   — Si $T(x) = 0$, alors $0 = \|T(x)\| \leq C\|x\|$;
   — Si $T(x) \neq 0$, alors $\|T(x)\| \leq C\|x\|$.

   Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{H}, \|T(x)\| \leq C\|x\|} \ .$$

   De même, la question (2) et la coercivité de a assure que

$$\forall x \in \mathscr{H} \ , \ \ \langle T(x), x \rangle = a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2 \ ,$$

   et l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que

$$\forall x \in \mathscr{H} \ , \ \ \alpha\|x\|^2 \leq \langle T(x), x \rangle \leq \|T(x)\| \cdot \|x\| \ .$$

   — Si $x = 0$, alors $\alpha\|0\| \leq \|T(0)\|$;
   — Si $x \neq 0$, alors $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\|$.

   Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{H} \ , \ \ \alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \ .}$$

5. Soit $x \in \ker T$. La question (4) assure que
$$0 = \|T(x)\| \geq \alpha \|x\|.$$
Comme $\alpha > 0$, on observe que $\|x\| = 0$. Par séparation de la norme $x = 0$ ce qui assure que $\ker T = \{0\}$ et donc que T est injective.
6. Soit $x \in T(\mathscr{H})^{\perp}$, alors
$$0 = \langle T(x), x\rangle = a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$$
Donc $\|x\| = 0$ et par séparation de la norme $x = 0$. Il s'ensuit que $T(\mathscr{H})^{\perp} = \{0\}$.
7. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in T(\mathscr{H})^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un élément $y \in \mathscr{H}$. Alors pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,
$$\alpha \|x_p - x_q\|^2 \leq a(x_p - x_q, x_p - x_q) \leq \langle T(x_p - x_q), x_p - x_q\rangle \ ,$$
et l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que
$$\begin{aligned}\alpha \|x_p - x_q\|^2 &\leq \|T(x_p - x_q)\| \cdot \|x_p - x_q\| \\ &= \|y_p - y_q\| \cdot \|x_p - x_q\|. .\end{aligned}$$
Il s'ensuit que $\alpha\|x_p - x_q\| \leq \|y_p - y_q\| \to 0$ quand $p, q \to +\infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{H}$. Elle converge donc vers un élément $x \in \mathscr{H}$. Par continuité de T, on a $T(x) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} T(x_n) = y \in T(\mathscr{H})$.
8. La question (6) montre que $T(\mathscr{H})$ est dense dans $\mathscr{H}$, *i.e.* $\overline{T(\mathscr{H})} = \mathscr{H}$. La question (7) assure que $T(\mathscr{H})$ est fermé, *i.e.* $\overline{T(\mathscr{H})} = T(\mathscr{H})$. Il s'ensuit que $T(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$
9. Soit φ une forme linéaire continue sur $\mathscr{H}$. Le théorème de Riesz assure qu'il existe un unique élément $a_x \in \mathscr{H}$ tel que
$$\forall y \in \mathscr{H} \ , \ \ \langle a_x, y\rangle = \varphi(y).$$
Les questions (5) et (7) assurent que T est bijective. Il existe donc un unique élément $x \in \mathbb{R}$ tel que $T(x) = a_x$. La question (2) assure que
$$\forall y \in \mathscr{H} \ , \ \ \langle T(x), y\rangle = a(x,y) \ .$$
On en déduit qu'il existe un unique élément $x \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall y \in \mathscr{H} \ , \ \ a(x,y) = \varphi(y) \ .$$

Solution 8.1. [énoncé]

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathscr{H}$. On peut construire par extraction une famille libre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\mathrm{Vect}((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathrm{Vect}((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $F_k = \mathrm{Vect}\{(f_i)_{i\in[\![0,k]\!]}\}$.
Le procédé de Gram-Schmidt assure qu'il existe une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{H}^{\mathbb{N}}$ tel que
$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \ F_k = \mathrm{Vect}\{(f_i)_{i\in[\![0,k]\!]}\} = \mathrm{Vect}\{(e_i)_{i\in[\![0,k]\!]}\}$$
Les $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $\mathscr{H}$ telle que la réunion $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est dense dans $\mathscr{H}$, ce qui assure que $\overline{\mathrm{Vect}\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}\}}} = \mathscr{H}$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une base hilbertienne dénombrable de $\mathscr{H}$.

Solution 8.2. [énoncé]

1. La formule de Parseval permet d'écrire que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle Ae_n, f_j\rangle|^2 \ .$$
Les propriétés de l'opérateur adjoint A^* de A et le théorème de Fubini–Tonnelli permettent d'écrire
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle Ae_n, f_j\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle e_n, A^*f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, A^*f_j\rangle|^2 \ .$$
Comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne et que pour tout $z\in\mathbb{C}, |z| = |\overline{z}|$, on voit que
$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, A^*f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{\langle A^*f_j, e_n\rangle}|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle A^*f_j, e_n\rangle|^2 \ .$$
La formule de Parseval assure que
$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle A^*f_j, e_n\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|A^*f_j\|^2 \ .$$
In fine, on a démontré que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|A^*f_j\|^2 \ .$$
2. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de $\mathscr{H}$. La question (1) assure que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|A^*e_j\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Af_n\|^2 \ ,$$
ce qui assure que la quantité $\|A\|_{HS}$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour démontrer que $\|\cdot\|_{HS}$ est une norme sur $HS(\mathscr{H})$, on commence par vérifier que $HS(\mathscr{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. On observe que $0_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \in HS(\mathscr{H})$.
Soient $(A,B)\in HS(\mathscr{H})^2$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|$ assurent que
$$\|(A+\lambda B)e_n\|^2 \leq \left(\|Ae_n\| + |\lambda|\|Be_n\|\right)^2 \ ,$$
et par convexité de l'application $x\mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a
$$\left(\frac{\|(Ae_n\|}{2} + \frac{|\lambda|\cdot\|Be_n\|}{2}\right)^2 \leq \frac{\|Ae_n\|^2}{2} + \frac{|\lambda|^2\cdot\|Be_n\|^2}{2} \ .$$
Par conséquent,
$$\|(A+\lambda B)e_n\|^2 \leq 2\|Ae_n\|^2 + 2|\lambda|^2\cdot\|Be_n\|^2 \ .$$
On voit donc que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(A+\lambda B)e_n\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\|Ae_n\|^2 + 2\|\lambda Be_n\|^2 \leq 2\sum_{n\in\mathbb{N}}\|Ae_n\|^2 + 2|\lambda|^2\sum_{n\in\mathbb{N}}\|Be_n\|^2 \leq +\infty \ .$$
Il s'ensuit que $HS(\mathscr{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$.

Point clé 10. Pour montrer que $\|\cdot\|_{HS}$ est une norme sur $HS(\mathscr{H})$, on va montrer que c'est une norme associée à un produit scalaire.

Considérons $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS(\mathscr{H})} : HS(\mathscr{H}) \times HS(\mathscr{H}) \to \mathbb{C}$ définie sur pour tous $(A,B) \in HS(\mathscr{H})^2$ par

$$\langle A, B\rangle_{HS(\mathscr{H})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, Be_n\rangle_{\mathscr{H}} \ .$$

On va montrer que c'est une forme hermitienne sur $HS(\mathscr{H})$.

— Pour tout $(A,B) \in HS(\mathscr{H})^2$. Alors

$$\langle A, B\rangle_{HS(\mathscr{H})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, Be_n\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\langle Be_n, Ae_n\rangle}_{\mathscr{H}} = \overline{\langle B, A\rangle}_{HS(\mathscr{H})} \ .$$

— Pour tout $(A,B,C) \in HS(\mathscr{H})^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \langle A, B+\lambda C\rangle_{HS(\mathscr{H})} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, (B+\lambda C)e_n\rangle_{\mathscr{H}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, Be_n\rangle_{\mathscr{H}} + \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, Ce_n\rangle_{\mathscr{H}} \\ &= \langle A, B\rangle_{HS(\mathscr{H})} + \lambda \langle A, C\rangle_{HS(\mathscr{H})} \ . \end{aligned}$$

— Soit $A \in HS(\mathscr{H})$ tel que $\langle A, A\rangle_{HS(\mathscr{H})} = 0$. Alors

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, Ae_n\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_{\mathscr{H}}^2 \ .$$

On voit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Ae_n = 0$. Il s'ensuit que $A = 0$ sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ qui est dense dans $\mathscr{H}$. Comme A est une application continue, la caractérisation séquentielle de la continuité garantit que $A = 0$ sur $\mathscr{H}$.

Il s'ensuit que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS(\mathscr{H})}$ est un produit hermitien sur $HS(\mathscr{H})$. Par ailleurs, on remarque que

$$\forall A \in HS(\mathscr{H}) \ , \ \ \|A\|_{HS} = \sqrt{\langle A, A\rangle_{HS(\mathscr{H})}} \ ,$$

ce qui assure que $\|\cdot\|_{HS}$ est une norme sur $HS(\mathscr{H})$.

Soit $x \in \mathscr{H}$. On a $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$ et donc par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme

$$\|Ax\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle| \cdot \|Ae_n\| \ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Parseval assurent que

$$\|Ax\| \leq \|A\|_{HS}\|x\| \ .$$

ce qui assure que $\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \leq \|A\|_{HS}$.

4. Supposons que B est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Alors

$$\|A \circ B\|_{HS} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(A \circ B)e_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Be_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \ .$$

Donc $A \circ B \in HS(\mathscr{H})$.

De même, supposons que A est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Dans la question (1), nous avons montré que $\|A^*\|_{HS} = \|A\|_{HS}$. Il s'ensuit que $A^* \in HS(\mathscr{H})$ et

$$\|A \circ B\|_{HS} = \|B^* \circ A^*\|_{HS} \leq \|B^*\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^*e_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \ .$$

Donc $A \circ B \in HS(\mathscr{H})$.

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $HS(\mathscr{H})$. L'inégalité

$$\|A_p - A_q\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} \leq \|A_p - A_q\|_{HS} \ , \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \ ,$$

assure que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Comme $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est complet, il existe $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = 0$. Il reste à montrer que $A \in HS(\mathscr{H})$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\|_{HS} = 0$.

Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, et pour tout $M \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{M} \|A_p e_n - A_q e_n\|^2 \leq \|A_p - A_q\|_{HS}^2 \leq \varepsilon^2 \ .$$

En passant à la limite en $q \to +\infty$, par continuité de la norme, on a

$$\sum_{n=0}^{M} \|A_p e_n - Ae_n\|^2 \leq \varepsilon^2 \ .$$

En prenant la limite quand $M \to +\infty$, on a

$$\|A_p - A\|_{HS} \leq \varepsilon \ .$$

L'inégalité triangulaire inversée garantit que

$$\|A\|_{HS} \leq \varepsilon + \|A_p\|_{HS} \ ,$$

ce qui assure que $A \in HS(\mathscr{H})$ et que $\lim_{p\to+\infty} \|A_p - A\|_{HS} = 0$. Il s'ensuit que $HS(\mathscr{H})$ est un espace de Hilbert.

Solution 9.1. [énoncé]

1.

Point méthode 14. Pour démontrer que $\widehat{f}$ est bien définie, il suffit de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x)e^{-ixt}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x)e^{-ixt}| = |f(x)| \cdot |e^{-ixt}| = |f(x)| \ ,$$

ce qui assure que $x \mapsto f(x)e^{-ixt} \in L^1(\mathbb{R})$ puisque f est intégrable. La transformée de Fourier $\widehat{f}$ est donc bien définie.

Ici, comme nous devons aussi démontrer que $\widehat{f}$ est continue, nous allons utiliser le théorème de continuité sous le signe de l'intégrale de Lebesgue qui assure aussi que la fonction est bien définie.

On va montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est bien définie et continue : pour cela nous allons utiliser le théorème de continuité sous l'intégrale de Lebesgue :

— pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x)e^{-ixt}$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(x)e^{-ixt}$ est continue ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(x)e^{-itx}| \leq |f(x)|$ où $x \mapsto |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$.

Il s'ensuit que $\widehat{f}$ est bien définie et continue.

2.

Point clé 11. Dans ce type d'exercice, il est souvent bien plus facile de démontrer une propriété sur un sous-espace dense suffisamment régulier et de passer à la limite plutôt que d'attaquer le problème de front.

Comme $\mathscr{C}_c^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R};\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Point clé 12. Ici, on pourrait vite être tenter de conclure en utilisant le théorème de convergence dominée. Malheureusement, ici aucune majoration évidente ne permet d'obtenir l'hypothèse de domination.
Une autre méthode consiste à utiliser l'inégalité triangulaire séparer la quantité à contrôler en deux termes plus maniables. En particulier, on utilisera une intégration par parties ce qui justifie que l'on regarde les fonctions de classe C^1 à support compact.

L'inégalité triangulaire assure que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(t)| &\leq |\widehat{f}(t) - \widehat{f}_n(t)| + |\widehat{f}_n(t)| \\
&\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \Big| + |\widehat{f}_n(t)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \cdot |e^{-ixt}|\,\mathrm{d}t + |\widehat{f}_n(t)| \\
&= \|f_n - f\|_1 + |\widehat{f}_n(t)| \ . \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Or pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ \ \|f_{n_0} - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{1}$$

Par ailleurs

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \ \widehat{f}_{n_0}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{n_0}(t) e^{-i n_0 t} \, \mathrm{d}x \ .$$

On se donne un réel positif M_{n_0} tel que supp $f_{n_0} \subset [-M_{n_0}, M_{n_0}]$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \ \widehat{f}_{n_0}(t) = \int_{-M_{n_0}}^{M_{n_0}} f_{n_0}(t) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x \ .$$

En effectuant une intégration par parties, on voit que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \ , \ \ \widehat{f}_{n_0}(t) &= \left[\frac{1}{-it} f_{n_0}(t) e^{-ixt} \right]_{-M_{n_0}}^{M_{n_0}} - \frac{1}{-it} \int_{-M_{n_0}}^{M_{n_0}} f'_{n_0}(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{-i}{t} \int_{-M_{n_0}}^{M_{n_0}} f'_{n_0}(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x \ , \end{aligned}$$

ce qui assure que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \ , \ \ |\widehat{f}_{n_0}(t)| &= \frac{1}{|t|} \Big| \int_{-M_{n_0}}^{M_{n_0}} f'_{n_0}(x) e^{-ixt} \, \mathrm{d}x \Big| \\ &\leq \frac{1}{|t|} \int_{-M_{n_0}}^{M_{n_0}} |f'_{n_0}(x) e^{-ixt}| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{|t|} \|f'_{n_0}(x)\|_\infty \\ &< +\infty \ , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue puisque f_{n_0} est continue à support compact. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \to +\infty} \widehat{f}_{n_0}(t) = 0$.

Par conséquent, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall t \in [T, +\infty[\ , \ \ |\widehat{f}_{n_0}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{2}$$

En réinjectant les équations (1) et (2) dans ($\star$) on obtient que

$$\forall t \in [T, +\infty[\ , \ \ |\widehat{f}(t)| \leq \varepsilon \ . \tag{4}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{t \to +\infty} |\widehat{f}(t)| = 0 \ .$$

On obtient de manière analogue le résultat quand $t \to -\infty$.

Solution 10.1. [énoncé]

Les fonctions f et g sont toutes les deux dans $L^1(\mathbb{R})$. Elles sont donc convolables et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\mathbb{1}_{[-a,a]}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x-y)\,\mathrm{d}y\ . \end{aligned}$$

Or, $(x-y) \in [-a,a] \iff y \in [-a+x, a+x]$, ce qui assure que

$$f * g(x) = \lambda\big([-a+x, a+x] \cap [-1,1]\big)\ ,$$

où λ représente la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

On distingue donc 5 cas disjoints :

(i) si $a + x \leq -1$, *i.e.* $x \in [-\infty, -a-1]$, alors $f * g(x) = 0$;

(ii) si $1 \leq -a + x$, *i.e.* $x \in [1+a, +\infty[$, alors $f * g(x) = 0$;

(iii) si $[-1,1] \subset [-a+x, a+x]$, *i.e.* $x \in [-a+1, a-1]$, alors $f * g(x) = 2$;

(iv) si $x \in [-a-1, -a+1]$, alors $f * g(x) = x + a + 1$;

(v) si $x \in [a-1, a+1]$, alors $f * g(x) = a + 1 - x$.

Solution 10.2. [énoncé]

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, les résultats du cours assurent que l'application $f * g$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ ce qui montre que $\mathscr{F}(f * g)$ est bien définie.

Par définition de la transformée de Fourier et de la convolution, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \ \mathscr{F}(f * g)(t) &= \int_{\mathbb{R}} f * g(x) e^{-ixt}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)e^{-ixt}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Comme les fonctions f et g sont positives, le théorème de Fubini–Tonelli assure que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \ \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-s)g(s)e^{-ixt}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-s)g(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-s)g(s)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(s)| \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x-s)|\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \Big) \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(s)|\,\mathrm{d}x \Big) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty\ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $(x,s) \mapsto f(x-s)g(s)e^{-ixt}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \ \mathscr{F}(f*g)(t) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-s)g(s)e^{-ixt}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-s)e^{-i(x-s)t}g(s)e^{-ist}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(s)e^{-ist}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)e^{-i(x-s)t}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(s)e^{-ist}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iyt}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-s)e^{-i(x-s)t}\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} g(s)e^{-ist}\,\mathrm{d}s\Big) \\ &= \mathscr{F}f(t)\cdot\mathscr{F}g(t)\end{aligned}$$

Solution 11.1. [énoncé]

Q°1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ \varphi_n(x) = n\varphi(nx)\ .$$

La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ ainsi construite est une approximation de l'unité.

Q°2)

> **Point clé 13.** L'idée ici, c'est de découper $\varphi_n * f(x)$ en deux parties de manière à contrôler les termes proches de x et loin de x.
> Soit un réel $\delta > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
>
> $$\varphi_n * f(x) = \int_{|y|\le\delta} f(x-y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|>\delta} f(x-y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $K \subset [a,b]$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il existe un réel $M \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. Par ailleurs, le théorème de Heine assure que f est uniformément continue sur $[a,b]$, ce qui assure que

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists \delta_0 > 0 :\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \ |s-t| \leq \delta_0 \implies |f(s)-f(t)| \leq \varepsilon\ .$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned}|\varphi_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{|y|\le\delta_0} \varphi_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y + \int_{|y|>\delta_0} \varphi_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \varepsilon\int_{|y|\le\delta_0} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|>\delta_0} |f(x-y)-f(x)|\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \varepsilon + 2M\int_{|y|>\delta_0} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y\ .\end{aligned}$$

Par définition de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\int_{|y|>\delta_0} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, ce qui assure que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ \ |\varphi_n * f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \ .$$

In fine, on a démontré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq n_0 \ , \ \ \forall x \in K \ , \ \ |\varphi_n * f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \ ,$$

c'est-à-dire que $\varphi_n * f(x)$ converge uniformément vers f sur tout compact.

Q°3)

> **Point clé 14.** Comme bien souvent, on remarquera ici qu'il est plus facile de démontrer le résultat pour les fonctions continues à support compact, et passer ensuite à la limite pour obtenir le résultat.

Comme $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire assure que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p \leq \|\varphi_n * f - \varphi_n * f_n\|_p + \|\varphi_n * f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \qquad (\star)$$

On voudra donc contrôler chacun de ces termes.

On remarque que pour tout $(f,g) \in L^p(\mathbb{R})^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n * f(x) - \varphi_n * g(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x-y) |(f(y) - g(y))| \,\mathrm{d}y \Big)^p \,\mathrm{d}x \ .$$

Comme $\varphi_n(x-y)\,\mathrm{d}y$ est une mesure de probabilité, en appliquant l'inégalité de Jensen, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n * f(x) - \varphi_n * g(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x-y) |(f(y) - g(y))|^p \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x \ ,$$

et comme l'intégrande de cette dernière intégrale est positive, le théorème de Fubini-Tonelli permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n * f(x) - \varphi_n * g(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |(f(y) - g(y))|^p \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x-y) \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}y \quad = \int_{\mathbb{R}} |(f(y) - g(y))|^p \,\mathrm{d}y \ ,$$

où la dernière égalité provient du fait que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \,\mathrm{d}x = 1$.

Ce dernier résultat assure que

$$\|\varphi_n * f - \varphi_n * f_n\|_p \leq \|f - f_n\|_p \ .$$

En réinjectant ce résultat dans $(\star)$, on trouve que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|\varphi_n * f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \ .$$

Or, on rappelle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$ par construction. De plus la question **(Q°2)** assure que $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f_n - f_n\|_p = 0$.
Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0 \ .$$

Q°4) (a) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est positive et

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-x^2)^n \mathbb{1}_{|x|\leq 1}}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n} = 1\ .$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 x(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\ ,$$

ce qui montre que $c_n \leq n+1$.
Par conséquent, pour tout réel $0<\delta<1$,

$$\int_{|x|\geq\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 2c_n\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2c_n(1-\delta^2)^n \leq 2(n+1)(1-\delta^2)^n\ .$$

Comme $|1-\delta^2|<1$, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|\geq\delta}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ ,$$

ce qui assure que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

(b) Pour tout $x \in I$,

$$f*\varphi_n(x) = \varphi_n * f(x) = \int_{-1/2}^{1/2}\varphi_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

Pour tout $(x,y)\in I^2$, on a $|x-y|\leq 1$. Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\varphi_n(x-y) = c_n(1-(x-y)^2)^n\ .$$

En développant cette dernière expression, il s'ensuit que φ_n est un polynôme en x, ce qui garantit le résultat souhaité.

(c) Si f vérifie les hypothèses de la question **(Q°4.b)**, la question **(Q°2)** permet de conclure que f que la limite uniforme d'une suite de polynôme.

Donnons nous maintenant un compact $K\subset\mathbb{R}$, et $f : K\to\mathbb{C}$ une fonction continue quelconque. Soit $[a,b]$ un segment qui contient strictement K. On prolonge f par une fonction continue qui s'annule en dehors de $[a,b]$. Ensuite, on se ramène à l'intervale I par changement de variables : pour cela on pose

$$g(x) = f\Big((b-a)t + \frac{a+b}{2}\Big)\ .$$

g vérifie les hypothèses de la question **(Q°4.b)**. C'est donc la limite uniforme d'une suite de polynôme, ce qui assure que f est la limite uniforme d'une suite de polynôme, puisque l'image d'un polynôme par un changement de variables affines est encore un polynôme.

Solution 12.1. [énoncé]

Q°1) Par définition, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$: φ_n est une fonction positive continue à support compact et supp $\varphi_n \subset [-1,1]$. Aussi $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$. In fine, par définition de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \leq \delta$ et donc

$$\int_{|x|>\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Q°2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \ \varphi_n * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = 0\ ,$$

puisque f vérifie (H) et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \varphi_n(x-y) \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$. On peut donc conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \varphi_n * f = 0\ .$$

Q°3) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq a$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_n * \left[\mathbb{1}_{[-b,b]} f\right](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-y)\mathbb{1}_{[-b,b]} f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-b}^{b} \varphi_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\ .\end{aligned}$$

Or par construction, (ii) assure que le support de φ_n est contenu dans $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n] \subset [-1,1]$. Comme de plus $|x| \leq a$, il s'ensuit que le support de $y \mapsto \varphi_n(x-y)$ est contenu dans $[-b,b]$. Par suite

$$\int_{-b}^{b} \varphi_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \varphi_n * f(x) = 0\ ,$$

où la dernière égalité est obtenue à l'aide de la question **(Q°2)**.

Q°4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_{[-b,b]} f - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{[-b,b]} f(x) - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a} |\mathbb{1}_{[-b,b]} f(x) - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)(x)\,\mathrm{d}x| \\ &\qquad\qquad + \int_{|x|>a} \underbrace{|\mathbb{1}_{[-b,b]} f(x) - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)(x)|}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{-a}^{a} |\mathbb{1}_{[-b,b]} f(x) - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)(x)|\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Dans **(Q°2)**, on a démontré que $\varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)(x) = 0$ pour tout $|x| \leq a$. À partir de l'inégalité précédente, on peut écrire que

$$\|\mathbb{1}_{[-b,b]} f - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)\|_1 \geq \int_{-a}^{a} |\mathbb{1}_{[-b,b]} f(x)|\,\mathrm{d}x\ ,$$

et puisque $[-a,a] \subset [-b,b]$, on obtient

$$\|\mathbb{1}_{[-b,b]} f - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)\|_1 \geq \int_{-a}^{a} |f(x)|\,\mathrm{d}x\ ,$$

Q°5) Étant donné que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{1}_{[-b,b]} f \in L^1(\mathbb{R})$. En appliquant le résultat de la question (Q°3) de l'exercice (11.1), on voit que

$$\lim_{n \to +\infty} \|\mathbb{1}_{[-b,b]} f - \varphi_n * (\mathbb{1}_{[-b,b]} f)\|_1 = 0 ,$$

puisque $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité. Par encadrement, on voit donc que

$$\int_{-a}^{a} |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0 .$$

Comme le réel $a > 0$ est arbitraire, il s'ensuit que $f = 0$ presque partout.

Solution 13.1. [énoncé]

Q°1)

> **Point clé 15.** Dans cette question, nous voulons démontrer qu'un certain espace est dense. Une stratégie efficace consiste à utiliser les théorèmes de densité que l'on possède pour minimiser les efforts à fournir.

Puisque l'ensemble $\mathscr{C}^1_c(]0,1[,\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(]0,1[)$, il suffit de démontrer que $\mathscr{C}^1_c(]0,1[,\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}$ pour montrer que $\mathscr{S}$ est dense dans $L^2(]0,1[)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^1_c(]0,1[;\mathbb{R})$. En effectuant une intégration par parties, on montre que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathscr{C}^1_c(]0,1[;\mathbb{R}) , \quad \int_0^1 f(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x &= \Big[f(x)\varphi(x) \Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \\ &= - \int_0^1 f'(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x . \end{aligned}$$

Par ailleurs, f' est continue, donc $f' \in L^2(]0,1[)$. En posant $\Lambda_f = f'$, on a bien montré que $f \in \mathscr{S}$. Par suite, $\mathscr{C}^1_c(]0,1[,\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ est dense dans $L^2(]0,1[)$.

Q°2) Soit $f \in \mathscr{S}$. Supposons qu'il existe deux fonctions Λ_f et $\widetilde{\Lambda}_f$ dans $L^2(]0,1[)$ telles que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^1_c(]0,1[;\mathbb{R}) , \quad \int_0^1 f(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = - \int_0^1 \Lambda_f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = - \int_0^1 \widetilde{\Lambda}_f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x .$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^1_c(]0,1[;\mathbb{R}) , \quad 0 = \int_0^1 [\Lambda_f(x) - \widetilde{\Lambda}_f(x)]\varphi(x) \, \mathrm{d}x .$$

Par densité de $\mathscr{C}^1_c(]0,1[,\mathbb{R})$ dans $L^2(]0,1[)$, on en déduit par convergence dominée que

$$\forall g \in L^2(]0,1[) , \quad 0 = \int_0^1 [\Lambda_f(x) - \widetilde{\Lambda}_f(x)] g(x) \, \mathrm{d}x .$$

En particulier, si on pose $g = \Lambda_f - \widetilde{\Lambda}_f$, on a

$$\|\Lambda_f - \widetilde{\Lambda}_f\|_2^2 = \int_0^1 \left[\Lambda_f(x) - \widetilde{\Lambda}_f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 .$$

Par séparation de la norme, on en déduit que $\Lambda_f = \widetilde{\Lambda}_f$ ce qui assure que l'application $f \mapsto \Lambda_f$ de $\mathscr{S}$ dans $L^2(]0,1[)$ est injective.

Q°3)

Point méthode 15. Pour démontrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$ est un produit scalaire nous allons démontrer que c'est une forme bilinéaire, symétrique définie positive.

∘ **Etape 1** : $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$ est symétrique par définition.
∘ **Etape 2** : $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$ est une forme bilinéaire.
En effet, soient $(f_1, f_2) \in \mathscr{S}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathscr{C}^1_c(]0,1[;\mathbb{R})\ , \quad \int_0^1 (f_1 + \lambda f_2)(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f_1(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \lambda f_2(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(\star)}{=} -\int_0^1 \Lambda_{f_1}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 \Lambda_{f_2}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left[\Lambda_{f_1} + \lambda\Lambda_{f_2}\right](x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

La question **(Q°2)** assure que $\Lambda_{f_1+\lambda f_2} = \Lambda_{f_1} + \lambda\Lambda_{f_2}$. Il s'ensuit que l'injection

$$f \in \mathscr{S} \mapsto \Lambda_f \in L^2(]0,1[)$$

est linéaire.
Grâce à la linéarité de l'intégrale, on peut montrer pour tout $h \in \mathscr{S}$ que l'application $f \mapsto \langle f, h\rangle_{\mathscr{S}}$ est linéaire. Par symétrie, on en déduit que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$ est bilinéaire.
∘ **Etape 3** : $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$ est définie positive.
Soit $f \in \mathscr{S}$. Par définition de $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$,

$$\langle f, f\rangle_{\mathscr{S}} = \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \Lambda_f(x)^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2 + \|\Lambda_f\|_2^2 \geq 0\ .$$

ce qui garantit la positivité de $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$. De plus, si $\langle f, f\rangle_{\mathscr{S}} = 0$, on a par encadrement

$$\|f\|_2^2 = \|\Lambda_f\|_2^2 = 0$$

ce qui garantit que $f = 0$ par séparation de la norme.

En conclusion, les étapes (1), (2) et (3) garantissent que $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{S}$.

Q°4)

Point méthode 16. Ici, nous voulons montrer que $(\mathscr{S}, \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathscr{S}})$ est un espace de Hilbert. Depuis la question **(Q°3)**, nous savons qu'il s'agit d'un espace préhilbertien, donc il ne reste qu'à vérifier que c'est un espace complet : pour cela, une stratégie générale consiste à revenir dans un espace dont on connaît déjà la complétude.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ ,\ \ (p \geq N_\varepsilon, q \geq N_\varepsilon) \implies \|f_p - f_q\|_{\mathscr{S}} \leq \varepsilon\ .$$

ce qui assure que pour tout $p, q \geq N_\varepsilon$,

$$\int_0^1 (f_p(x) - f_q(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (\Lambda_{f_p}(x) - \Lambda_{f_q}(x))^2\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\ .$$

Il s'ensuit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Lambda_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$. Comme $L^2(]0,1[)$ est complet, il existe des éléments f et g dans $L^2(]0,1[)$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\Lambda_{f_n} - g\|_2 = 0$$

Il reste donc à montrer que $\Lambda_f = g$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[;\mathbb{R}) \ , \ \int_0^1 f_n(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\star)}{=} -\int_0^1 \Lambda_{f_n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz assure que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[;\mathbb{R}) \ , \ \left|\int_0^1 (f_n(x) - f(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f_n - f\|_2 \cdot \|\varphi'\|_2 \ ,$$

et que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[;\mathbb{R}) \ , \ \left|\int_0^1 (\Lambda_{f_n}(x) - g(x)) \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|\Lambda_{f_n}(x) - g(x)\|_2 \cdot \|\varphi\|_2 \ ,$$

ce qui assure que pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[;\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \Lambda_{f_n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Par unicité de la limite, on voit donc que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[;\mathbb{R}) \ , \ \int_0^1 f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

L'utilisation de la question (**Q°2**) permet de conclure que $\Lambda_f = g$.

In fine, cela permet de conclure que $(\mathscr{S}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{S}})$ est un espace de Hilbert.

Références

[1] Peter Lax and Arthur Milgram. Parabolic equations. *Annals of Math. Studies*, 33 :167–190, 1954.

[2] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.