Guide de survie en analyse fonctionnelle

Guillaume Garnier
https://www.guillaumegarnier.com

5 mars 2023

Table des matières

Notations :

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.
Pour tout espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, nous supposerons que la mesure μ est positive.

1 Jour 1 - Continuité des opérateurs

1.1 Rappels de cours

En analyse fonctionnelle, il est assez fréquent de se promener dans des espaces vectoriels normés. Pour passer de l'un à l'autre, on utilise généralement des applications linéaires, puisqu'elles permettent de conserver la structure algébrique de nos espaces.

A ce stade de votre voyage dans le monde des mathématiques, vous devez être convaincus de l'importance de savoir si une application est continue ou non.

Avant de franchir les portes du monde de l'analyse fonctionnelle, les choses étaient plutôt simples. Tous les espaces vectoriels auxquels vous étiez confrontés étaient de dimension finie. Dès lors tout allait bien car *une application linéaire est toujours continue en* ***dimension finie***.

Cependant, le monde des mathématiques est bien plus vaste que la seule dimension finie. En particulier, une bonne partie des espaces intéressants sont des espaces de fonctions de dimension infinie. Dans ces univers infiniment plus grand, les choses deviennent bien plus compliquées puisqu' *il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues.*

A chaque fois que l'on voyage à l'aide d'une application linéaire, il faut donc se demander si cette application est continue ou non. Heureusement, il est inutile ici de sortir nos epsilons de notre boite à outils. Comme notre application est linéaire, il existe un critère bien plus simple que l'on peut utiliser.

Proposition 1.1. **(Critère pratique de continuité)** Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. T est continue si, et seulement si,

$$\boxed{\exists M > 0, \forall x \in E, \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E}$$

La norme de T, est la plus petite constante M pour laquelle cette inégalité a lieu. On note cette norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ ou $\|T\|$ si aucune ambiguïté n'est possible.

1.2 Les défis du jour

Exercice 1.1. Considérons l'opérateur de Dirac $\delta_0 : \mathcal{C}([0,1];\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, défini par $\delta_0(f) \longmapsto f(0)$.

1. Montrer que δ_0 est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que δ_0 n'est pas continu pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 1.2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{K})$ muni de la norme $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)dt \ . \end{array}$$

est continu et calculer sa norme.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Pour calculer la norme d'un opérateur continu, on effectue généralement deux étapes :

— Trouver un majorant de la norme.

— Montrer que ce majorant est atteint en choisissant une bonne fonction.

Malheureusement, il n'est pas toujours possible d'utiliser cette stratégie. L'exercice suivant montre qu'il existe des opérateurs bornés pour lesquels la norme n'est pas atteinte.

Exercice 1.3. **(Agrégation 2021 - Oraux)** Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \ell_1 & \longrightarrow & \ell_1 \\ (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)u_n\right)_{n\geq 0} \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme.
2. Peut-on trouver un vecteur $u \in \ell_1$ non nul tel que $\|f(u)\|_1 = \|f\| \cdot \|u\|_1$

2 Jour 2 - A la gloire des inégalités

2.1 Rappels de cours

Dans la section 1, nous avons présenté rapidement le paysage. Le monde de l'analyse fonctionnelle est un endroit étrange où l'on se déplace avec des opérateurs linéaires. Tout comme on a besoin d'un filet pour attraper des papillons, il faut les bons outils pour "chasser" un opérateur linéaire, c'est-à-dire montrer s'il est continue ou non.

Pour ce faire, on tentera généralement d'écrire une inégalité sur les normes. Mais pour ça, il est donc nécessaire de disposer d'un outillage adapté, forgé pour établir de telles inégalités.

Dans votre programme d'analyse fonctionnelle, vous avez en gros 3 théorèmes pour obtenir ce genre de résultats.
Chaque théorème est constitué de deux parties :

1. L'inégalité
2. Le cas d'égalité

Théorème 2.1. **(Inégalité de Hölder)**

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et des réels $p, q \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors, si f et g sont deux fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.}$$

Supposons de plus que $p, q \in]1, \infty[$ et $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$. Il y a égalité si, et seulement si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont colinéaires dans $L^1(X, \mu)$, *i.e.* s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\boxed{|f|^p = \lambda |g|^q,\ \mu - pp.}$$

Théorème 2.2. **(Inégalité de Minkowski)**

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in]1, \infty[$, et $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables.
Alors

$$\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.}$$

De plus, l'inégalité devient une égalité si, et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\boxed{f = \lambda g,\ \mu - pp.}$$

Théorème 2.3. **(Inégalité de Jensen)**

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe.
Pour toute fonction $f \in L^1(X, \mu)$,

$$\boxed{\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f) d\mu.}$$

Lorsque φ est strictement convexe, l'inégalité devient une égalité si, et seulement si il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{f = c,\ \mu - pp}$.

2.2 Les défis du jour

Exercice 2.1. **(Examen 2016)** – Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable. Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $\mathbb{R}_+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\mu(X)^2 \leq \int_X f d\mu \int_X g d\mu\ .$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2.2. **(Inégalité de Hölder inversée)** – Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $0 < p < 1$ et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient f, g deux fonctions mesurables.

1. Déterminer le signe de q.
2. Démontrer que $\|f\|_p \|g\|_q \leq \|fg\|_1$.

3 Jour 3 – Espace de Banach

3.1 Rappels de cours

Au cours de notre périple en analyse fonctionnelle, nous observons différents espaces vectoriels normées. Cependant, la plupart de ces espaces sont assez vides : il y a peu de vecteurs et il est généralement difficile d'avancer.

A force de voyage, on finit néanmoins par trouver toute une famille d'espace avec de bonnes propriétés.

Définition 3.1 (Espace de Banach)**.** – On appelle Espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes.

En plus, c'est très facile de fabriquer des espaces de Banach lorsqu'on en a trouvé un

Théorème 1. *Si E et F sont des espaces vectoriels normés, et si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E;F)$ est un espace de Banach.*

Ces espaces sont particulièrement intéressants, car il sont complets, *i.e.* sans trou. Il y a suffisamment de points pour être sûr qu'on y retrouve toutes les limites de suites de Cauchy.
En pratique, on préfère toujours voyager dans des espaces de Banach. D'ailleurs, presque tous les espaces importants en analyse sont des espace de Banach.

Bien sûr, le voyageur pourra se demander pourquoi est-ce que l'on aime tellement voyager dans des espaces de Banach ? Une première réponse consiste à dire *c'est l'une des rares structures d'espaces où notre boite à outils contient des théorèmes d'existence.*
En particulier :

— Toute application strictement contractante d'un espace de Banach E dans lui même, admet un unique point fixe.

— Toute application linéaire et continue d'un sous-espace dense d'un espace de Banach E vers un espace de de Banach F peut être prolongée de manière unique comme un opérateur de E vers F.

— Toute série absolument convergente est convergente dans un espace de Banach.

Et ces théorèmes ne sont qu'un échantillon bien maigre de tous les outils dont on dispose dans les espaces de Banach. Vous aurez l'occasion d'en rajouter bien d'autre dans la suite de votre voyage en Terres des mathématiques.

Proposition 3.2. Dans un espace vectoriel normé E, les proposition suivantes sont équivalentes :

(i) E est un espace de Banach

(ii) Toute série absolument convergente est convergente dans E.

Proposition 3.3. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $H \subset E$ un sous espace dense de E. Toute application linéaire continue $T : H \to F$ peut être prolongée en une application linéaire continue $\widetilde{T} : E \to F$ et $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

Dès lors, il est important d'avoir une méthode efficace pour savoir si un espace vectoriel normé est un espace de Banach. Il est donc assez pratique de mettre dans sa boite à outils la conduite à tenir (CAT) suivante :

Point méthode 1 (CAT pour montrer qu'un evn E est un espace de Banach)**.**

1. On considère une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E.
2. On considère une limite possible de cette suite x. Généralement, on s'appuiera ici sur les espaces complets $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour montrer que la suite $x_n(t)$ converge vers une limite $x(t)$ et x sera alors l'application $x : t \mapsto x(t)$.
3. On démontre que $x \in E$.

4. On démontre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E.

3.2 Les défis du jour

Exercice 3.1. Considérons une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\ell_1(\mathbb{N})$ vérifiant $\|a\|_1 < 1$. Pour toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$, on définit l'opération de convolution

$$a \star b = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k} \right)_{n\in\mathbb{Z}} . \tag{1}$$

1. Montrer que $a \star b \in \ell_\infty$ pour tout $b \in \ell_\infty$.
2. Soit $f \in \ell_\infty$. Montrer que l'opérateur $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ défini par $T(b) = a \star b + f$ est une contraction.
3. En déduire que l'équation $T(b) = b$ admet une unique solution $b \in \ell_\infty$.

Exercice 3.2. **(Opérateur de Volterra)** Notons $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'opérateur $T : E \to \mathbb{R}$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt .$$

1. Montrer que E est un espace de Banach.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $T^n f(x) = \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt$ où $K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.
   (b) En déduire la valeur $\|T^n\|$.
3. Calculer la somme $\sum_{n\geq 1} T^n$.
4. Résoudre l'équation $(I - T)f = g$, où $g \in E$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3.3. **(Examen 2016)** Soient E un espace vectoriel normé, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Montrer qu'on peut extraire une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(y_{k+1} - y_k)$ est normalement convergente.

4 Jour 4 - Les espace L^p

4.1 Rappels de cours

Au milieu de la multitude d'espace de Banach, il y a une classe d'espace que l'on aime tout particulièrement : Les espaces L^p.

Ces espaces sont d'une grande utilité dans le monde de l'analyse et des probabilités. D'une part, ce sont des espaces où il est très facile d'utiliser :

— l'inégalité de Hölder,
— l'inégalité de Minkowski.

De plus, ils ont beaucoup de très bonnes propriétés que vous découvrirez dans la suite de votre parcours en mathématique.

Le théorème de base de ces espaces est le suivant :

Théorème 4.1. **(Riesz–Fisher)** L^p est un espace de Banach, pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Une des qualités essentielles des espaces L^p, c'est qu'il est possible d'utiliser toute la puissance de la théorie de la mesure pour démontrer que certaines suites convergent.

Proposition 4.2. **(Convergenge L^p–dominée)** Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f_n \to f$, μ-p.p. et s'il existe $g \in L^p$ tel que $|f_n| \leq g$ pour tout n, alors

$$\boxed{f_n \xrightarrow{L^p} f\ .}$$

Dès lors, il est assez raisonnable de se poser la question réciproque. Est-ce que la convergence L^p suffit à garantir une convergence μ–presque partout ? La réponse à cette question est négative ! Cependant tout n'est pas perdu, car on arrive quand même à extraire une suite qui converge presque sûrement vers f.

Proposition 4.3. Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Alors, il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-pp.

4.2 Les défis du jour

Exercice 4.1. Soient $f, g \in L^3(\mathbb{R})$. Démontrer que $f^2 g$ est intégrable.

Exercice 4.2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. Démontrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(x^{(p-1)/p})$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt)^{1/p} \leq \varepsilon$.
4. En déduire que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^{(p-1)/p})$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Pour aller plus loin ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4.3. **(Produit de convolution)** – Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Notation : On notera désormais $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$ et que $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

5 Jour 5 - Mélange de saison

5.1 Rappels de cours

Ces derniers jours, nous avons vu beaucoup de paysages différents que l'on retrouve en analyse fonctionnelle. Je vous propose de nous arrêter un peu et de faire le point.

5.2 Les défis du jour

Exercice 5.1. Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $f \in E$, on considère l'opérateur $L(f) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ défini par $L(f)(t) = \int_0^1 (t+u)f(u)du$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de E.
2. Montrer que L est continue et calculer $\|L\|$.

Exercice 5.2. Soit E un e.v.n de dimension infinie et soit K une partie compacte de E. Montrer que K est d'intérieur vide.
Remarque : Le résultat de cet exercice est particulièrement intéressant puisqu'il assure qu'en dimension infinie, les parties compactes sont extrêmement fines

Exercice 5.3. Montrer que $B_\infty = \{f \in L^2([0,1]) : |f| \leq 1 \text{ presque partout }\}$ est fermé dans $L^2([0,1])$.

6 Jour 6 - Révisions

6.1 Rappels de cours

Aucun rappel aujourd'hui. Avec le week-end, je ne vous propose que de légers problèmes.

6.2 Les défis du jour

Exercice 6.1. On considère l'opérateur $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ défini par $Tu = v$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \; .$$

Montrer que T est continue et calculer sa norme.

Exercice 6.2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que
$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq 2\sqrt{x}\int_0^x \sqrt{t}|f(t)|^2 dt.$$
2. En déduire que $F \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

7 Jour 7 - La fin

Exercice 7.1. Donner un exemple d'une suite bornée de $L^1(\mathbb{R})$ convergeant simplement vers 0 mais n'ayant pas de limite dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 7.2. Soit $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite $L^p(\mu)$ qui converge presque partout vers $f \in L^p(\mu)$.

1. Soit $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Prouver que pour tout $n \geq 0$, $g_n \geq 0$.
2. Prouver que f_n converge vers f dans $L^p(\mu)$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.
Indication : On pourra appliquer le lemme de Fatou à la fonction g_n.

8 Corrigés des exercices

Solution 1.1. [énoncé]

1.

> **Point méthode 2.** Ici, on déroule tranquillement critère pratique. On cherche donc à obtenir une majoration de $|\delta_0(f)|$ par un terme de la forme $M\|f\|_\infty$.

Soit $f \in E$. On voit que f est une application continue définie sur un ensemble compact. Il s'ensuit qu'elle admet un maximum $\|f\|_\infty$. Par suite,

$$|\delta_0(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty.$$

ce qui assure que δ_0 est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ et que $\|\delta_0\| \leq 1$.

2.

> **Point méthode 3.** Pour montrer qu'une application linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés n'est pas continue, on cherchera généralement à construire une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{\|T(f_n)\|_F}{\|f_n\|_E} = +\infty$

Essayons de construire une bonne suite $(f_n)_{n\geq 0}$. Comme l'opérateur δ_0 amène toute la masse de f en 0, on est tenté de construire une suite de fonctions continues, d'intégrale 1 avec de plus en plus de masse en 0.

Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = \begin{cases} -2n^2x + 2n & \forall x \in [0, 1/n] \\ 0 & \forall x \in [1/n, 1] \end{cases}$. Ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|dx = 1$.

Par ailleurs, on observe que $|\delta_0(f_n)| = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\delta_0(f_n)|}{\|f_n\|_1} = +\infty$$

ce qui assure que δ_0 n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Solution 1.2. [énoncé]

> **Point méthode 4.** On veut démontrer qu'une application linéaire est continue, donc on déroule tranquillement le critère pratique. On cherche à obtenir une majoration de $\|T(f)\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ par un terme de la forme $M\|f\|_\infty$.

Soit $f \in E$. De part le théorème fondamental de l'analyse, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continuement dérivable, donc T est bien défini et $T(f)' = f$.

Dès lors, nous essayons d'obtenir notre majoration. Soit $f \in E$,

$$\|T(f)\|_F \leq \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty \leq x\|f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty .$$

On peut donc conclure que T est continue et que $\|T\| \leq 2$. Il est facile de voir que $\|T\| = 2$ en prenant f constante.

Solution 1.3. [énoncé]

1.

> **Point méthode 5.** Nous voulons montrer qu'une application est bien définie et continue. Notre méthode ne change pas, nous allons majorer $\|f(u)\|_1$ par un terme $M\|u\|_1$.

Ici, la linéarité de l'opérateur s'obtient facilement à l'aide de la linéarité de la somme.

Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, on a

$$\|f(u)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big| \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)}_{\leq 1} u_n \Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1 \ .$$

Donc l'application est bien définie, continue et $\|f\| \leq 1$.

> **Point clé 1.** La situation maintenant est un petit peu plus délicate. Nous voulons démontrer que $\|f\| = 1$. Cependant, ici cette norme n'est jamais atteinte (cf. question 2). Nous allons donc démontrer que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe un élément $u \in \ell_1$ tel que $\|f(u)\| > \alpha\|u\|_1$ ce qui permettra de conclure que $\|f\|_1 \geq 1$.

Soit $\alpha < 1$ et soit $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha < 1 - \frac{1}{n_\alpha+1} < 1$.
On définit la suite $u^\alpha = (u_n^\alpha)_{n\geq 0}$ où pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n^\alpha = 1$ si $n = n_\alpha$ et $u_n = 0$ sinon.

On a $\|f(u^\alpha)\|_1 = 1 - \frac{1}{n_\alpha+1} \geq 1 - \alpha = (1-\alpha)\|u^\alpha\|_1$.
Donc $\|f\| \geq 1$. On peut donc conclure que $\|f\| = 1$.

2. Nous allons démontrer qu'un tel élément u n'existe pas. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ non nul. Soit u_{n_0} le premier terme non nul de u. Alors $|(1 - \frac{1}{n_0+1})u_{n_0}| < u_{n_0}$. Par suite

$$\|f(u)\|_1 = \Big|(1 - \frac{1}{n_0+1})u_{n_0}\Big| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Big|\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)u_n\Big| \leq \Big|(1 - \frac{1}{n_0+1})u_{n_0}\Big| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n|$$
$$< |u_{n_0}| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| = \|u\|_1 \ .$$

Il s'ensuit que $\|f(u)\|_1 < \|u\|_1$.

Solution 2.1. [énoncé]

Point méthode 6. Ici, nous voulons contrôler le terme $\mu(X)^2$. Comme nos outils permettent uniquement de majorer des intégrales, nous allons donc écrire $\mu(X)$ sous la forme d'une intégrale.

On a

$$\mu(X)^2 = \left(\int_X 1 d\mu\right)^2 \leq \left(\int_X \sqrt{fg} d\mu\right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_X \sqrt{fg} d\mu\right) \leq \left(\int_X f d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_X g d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de conclure que

$$\mu(X)^2 \leq \int_X f d\mu \int_X g d\mu \, .$$

Solution 2.2. [énoncé]

1. Il est facile de voir ici que $q < 0$.
2.

Point méthode 7. Nous voulons établir une inégalité qui ressemble à celle de Hölder. Notre méthode va donc d'essayer d'appliquer la version classique du théorème de manière à faire apparaître l'inégalité demandée.

On a

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = \int_{\mathbb{R}} |fg|^p \times |g|^{-p} d\mu \tag{2}$$

Soit $r = \frac{1}{p}$ et soit $s = \frac{1}{1-p}$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.
En appliquant l'inégalité de Hölder on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|fg|^p)^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \times \left(\int_{\mathbb{R}} (|g|^{-p})^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|fg|^p)^{\frac{1}{p}} d\mu\right)^p \times \left(\int_{\mathbb{R}} (|g|^{-p})^{\frac{1}{1-p}} d\mu\right)^{1-p} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu\right)^p \times \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{\frac{p}{p-1}} d\mu\right)^{1-p} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu\right)^p \times \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q d\mu\right)^{1-p}
\end{aligned}$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance $\frac{1}{p}$, on obtient que

$$\|f\|_p \leq \|fg\|_1 \times \frac{1}{\|g\|_q}$$

et donc $\|f\|_p \|g\|_q \leq \|fg\|_1$.

Solution 3.1. [énoncé]

1. L'inégalité de Hölder permet d'écrire que $\|a \star b\|_\infty \leq \|a\|_1 \|b\|_\infty$.
2. Soit $u, v \in \ell^\infty$. On observe que

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty = \|a \star (u - v)\|_\infty \leq \|a\|_1 \|u - v\|_\infty \; .$$

Comme on sait que $\|a\|_1 < 1$, il s'ensuit que T est une contraction stricte.

3.

Point méthode 8. Ici, nous voulons montrer qu'un opérateur T admet un unique point fixe. Les espaces de Banach sont parfait pour cela. Il suffit juste de s'assurer que toutes les hypothèses du théorème de point fixe de Picard sont vérifiées.

On constate que T est un contraction stricte du Banach l^∞ dans lui-même. Le résultat demandé est une conséquence immédiate du théorème de point fixe.

Solution 3.2. [énoncé]

1.

Point méthode 9. Dans cette question, il faut démontrer qu'un espace est un espace de Banach, donc on déroule tranquillement notre CAT dans cette situation.

Nous admettrons ici que E est un espace vectoriel normé. Pour montrer que c'est un espace de Banach, il suffit donc de montrer qu'il est complet.

▶ Considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n, m \geq N$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \; . \tag{3}$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, il existe un nombre réel $f(x)$ tel que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

▶ Montrons que la fonction $f(x)$ est continue. Pour ce faire, nous utilisons la continuité de f_N qui assure qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1],\ |x - y| \leq \delta \implies |f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon \; .$$

Il s'ensuit que pour tout $x, y \in [0,1]$, tel que $|x - y| \leq \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_N(x) - f_N(y)| \leq 3\varepsilon \; , \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la fonction f est continue.

▶ Il ne reste plus qu'à vérifier que $f_n \to f$ dans E lorsque $n \to +\infty$.
Par passage à la limite dans (3), lorsque $m \to +\infty$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon ,$$

et par passage au sup en x, on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui assure que f_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2. (a) Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien $K_1(x, t) = 1$. Soit $n \geq 1$ quelconque et fixé pour lequel la propriété est vraie. Alors

$$T^{n+1}f(x) = T\Big(T^n f(x)\Big) = T\Big(\int_0^x K_n(x,t)f(t)dt\Big) = \int_0^x \int_0^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dtds \ . \tag{4}$$

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on peut écrire

$$T^{n+1}f(x) = \int_0^x f(t) \int_s^x \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}dsdt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt \ . \tag{5}$$

(b)

Point méthode 10. Ici, on nous demande de calculer la norme d'un opérateur. Pour cela, nous allons commencer par trouver un majorant de cette norme, puis montrer que ce majorant est atteint.

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$|T^n f(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \leq \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!} \ .$$

En prenant $f_0(t) = 1$, on observe que cette norme est bien atteinte.

3. Commençons par observer que $\sum_{n\geq 1} \|T^n\| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} = e - 1$. Il s'ensuit donc que la série $\sum_{n\geq 1} T^n$ est absolument convergente. Comme E est un espace de Banach, , il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 1} T^n$ converge vers une limite que l'on note S.

Il nous reste désormais à déterminer S.

Point clé 2. On remarque que pour tout $f \in E$, on a

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt. \tag{6}$$

Malheureusement, rien n'assure ici que f est positive. On ne peut pas appliquer directement le théorème de Fubini-Tonelli pour faire un échange série/intégrale.

Supposons néanmoins que cet échange est légitime. Alors

$$Sf(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt. \tag{7}$$

ce qui permet de déterminer S.

Considérons l'application $\widehat{S} : E \to E$ définie par $Sf(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt$. On voit immédiatement que $\widehat{S} \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\widehat{S} - \sum_{n=1}^{p} T^n\Big)\Big| &\leq \int_0^x \Big|e^{x-t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big||f(t)|dt \\ &\leq \|f\|_\infty \times \int_0^x \Big|e^{x-t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big|dt\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = x - t$, on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\widehat{S} - \sum_{n=1}^{p} T^n\Big)\Big| &\leq \|f\|_\infty \times \int_0^x \Big|e^{u} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\Big|du \\ &\leq \|f\|_\infty \times \sup_{u\in[0,1]} \Big|e^{u} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\Big|\end{aligned}$$

Donc $\Big\|\widehat{S} - \sum_{n=1}^{p} T^n\Big\| \leq \sup_{u\in[0,1]} \Big|e^u - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\Big|$.
Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}$ converge uniformément vers e^u sur tout compact de $\mathbb{R}$, il vient que $\widehat{S} = \sum_{n=1}^{\infty} T^n$ en faisant tendre p vers $+\infty$ et donc $S = \widehat{S}$.

4.

Point méthode 11. Ici, il faut avoir le réflexe de dire qu'on peut exprimer $(I - T)^{-1}$ à l'aide de $\sum_{n=0}^{p} T^n$.

En passant à la limite dans

$$(I - T)\Big(\sum_{n=0}^{p} T^n\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{p} T^n\Big)(I - T) ,$$

on obtient $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{p} T^n = I + S$.
Il s'ensuit que pour tout $g \in E$, on a $f = (I - T)^{-1}g = (I + S)g$, c'est à dire

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)dt . \tag{8}$$

Solution 3.3. [énoncé]

Point méthode 12. Dans cet exercice, nous souhaitons extraire une suite (y_k) dont la série de terme général $(y_{k+1} - y_k)$ converge. Pour cela, nous allons majorer $|y_{k+1} - y_k|$ par le terme d'une série convergente à l'aide du critère de Cauchy sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après le critère de Cauchy, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $N_k > 0$ tel que pour tout entier $p, q \geq N_k$, $|x_p - x_q| \leq \frac{1}{2^k}$.
Sans perte de généralité, nous pouvons supposons que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En posant $y_k = x_{N_k}$, on a

$$|y_{k+1} - y_k| = |x_{N_{k+1}} - x_{N_k}| \leq \frac{1}{2^k} \; .$$

Par critère de comparaison pour les séries positives, on en déduit que la série de terme général $(y_{k+1} - y_k)$ converge.

Solution 4.1. [énoncé]

Point méthode 13. Ici nous voulons montrer que la fonction f^2g est intégrable, *i.e.* que nous voulons majorer la quantité $\int_{\mathbb{R}} |f^2 g| dx$. Pour ce faire, nous allons tenter d'appliquer l'inégalité de Hölder.

Posons $p = \frac{3}{2}$ et $q = 3$. Ce sont bien des nombres conjugués car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |f^2 g| dx \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} (f^2)^{\frac{3}{2}} dx \Big)^{\frac{2}{3}} \times \Big(\int_{\mathbb{R}} g^3 dx \Big)^{\frac{1}{3}} < \infty \; . \tag{9}$$

Solution 4.2. [énoncé]

1. L'inégalité de Hölder permet d'écrire
$$\begin{aligned} \int_0^x |f(t)| dt &= \int_0^x |f(t)| \times 1 dt \\ &\leq \Big(\int_0^x |f(t)|^p \Big)^{1/p} \Big(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}} \Big)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \Big(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p \Big)^{1/p} x^{\frac{p-1}{p}} . \end{aligned}$$
Il s'ensuit que l'application F est bien définie.
2. Dans la question précédente, nous avons montré que
$$\int_0^x |f(t)| dt \leq \Big(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p \Big)^{1/p} x^{\frac{p-1}{p}} \; ,$$
ce qui assure que $F(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(x^{(p-1)/p})$.
3. Nous allons démontrer que $\lim_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt = 0$ ce qui permettra de conclure.
Pour cela, on applique le théorème de convergence dominée. Posons $f_a(t) = \mathbb{1}_{[a,+\infty]} |f(t)|^p$. Alors
   - $f_a \to 0$, p.p.
   - Pour tout $a > 0, |f_a| \leq |f|^p \in L^p(\mathbb{R})$.

   Le théorème de convergence dominée assure donc que $\lim_{a\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt = 0$.
4. Donnons nous $\varepsilon > 0$ et $a > 0$ comme dans la question précédente.

Point méthode 14. La question précédente nous laisse penser ici qu'il peut être utile de décomposer F en deux intégrales.

Soit $x > a$. Alors

$$\begin{aligned} |F(x) - F(a)| &\leq \int_a^x |f(t)|dt \\ &\leq \left(\int_a^x |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^x 1^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \varepsilon x^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{|F(x)|}{x^{(p-1)/p}} \leq \varepsilon + \frac{|F(a)|}{x^{(p-1)/p}}.$$

En prenant x assez grand, on voit donc que

$$\frac{|F(x)|}{x^{(p-1)/p}} \leq 2\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

Solution 4.3. [énoncé]

Ici, nous traitons en même temps les questions (1) et (2).

La conclusion est immédiate lorsque $p = +\infty$.

► Supposons pour commencer que $p = 1$. On note $F(x, y) = f(x-y)g(y)$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx = |g(y)| \|f\|_1 < +\infty \ ,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dxdy \leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \ .$$

Il s'ensuit que $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$. En appliquant le théorème de Fubini, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dy < \infty, \text{ p.p}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dydx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dxdy \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

► Désormais, considérons que $1 < p < +\infty$. Soit q le réel conjugué avec p.
D'après le point précédent, on sait que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ est dans $L^p(\mathbb{R})$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \times |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q}.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance p, on obtient que

$$|f \star g(x)|^p \leq (|f| \star |g|^p)(x)\|f\|_1 \ .$$

En appliquant le cas $p = 1$, on voit que $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|f \star g\|_p^p \leq \|f\|_1\|g\|_p^p\|f\|_1^{p/q} = \|f\|_1^p\|g\|_p^p.$$

Solution 5.1. [énoncé]

1. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$, on observe que

$$L(f)(t) = t \times \int_0^1 f(u)du + \int_0^1 uf(u)du \ .$$

   Il s'ensuit que $L(f)$ est une application affine et donc que $L(f) \in E$. On montre que L est bien une application linéaire par linéarité de l'intégrale.

2.

> **Point méthode 15.** Pour démontrer que L est une application continue, nous allons utiliser le critère pratique de continuité.

   Donnons nous une fonction $f \in E$. Alors pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|L(f)\|_\infty &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left|t \times \int_0^1 f(u)du + \int_0^1 uf(u)du\right| \\
&\leq \int_0^1 |f(u)|du + \int_0^1 |uf(u)|du \\
&\leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty \int_0^1 |u|du \\
&\leq \frac{3}{2}\|f\|_\infty \ .
\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\|L\| \leq \frac{3}{2}$. On peut démontrer que cette borne est atteinte en prenant $f = 1$.

Solution 5.2. [énoncé]

Raisonnons par l'absurde. Supposons que K ne soit pas d'intérieur vide. Alors il existe une boule ouverte $B \subset K$. Comme K est un compact, il est fermé et donc $\overline{B} \subset K$.

Il s'ensuit que $\overline{B}$ est compact (c'est un fermé dans un compact) et donc E est de dimension finie.

Solution 5.3. [énoncé]

Point méthode 16. Pour démontrer qu'un truc est fermé, on a essentiellement deux méthodes :

— Démontrer que c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. (cf. CC1)

— Utiliser le critère séquentiel.

Nous allons utiliser ici le critère séquentiel.

Considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B_∞. On suppose qu'il existe $f \in L^2([0,1])$ tel que $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Montrons que $f \in B_\infty$.

Il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $f_{n_k} \to f$ p.p. pour $x \in [0,1]$. Par conséquent, pour presque tout x, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k_{\varepsilon,x}$ tel que $|f_{n_{k_{\varepsilon,x}}}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. ce qui assure que

$$|f(x)| \leq |f_{n_{k_{\varepsilon,x}}}(x)| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit que $|f(x)| \leq 1$ pour presque tout x et donc $f \in B_\infty$, ce qui permet de conclure.

Solution 6.1. [énoncé]

Ici, la linéarité de la somme garantit que T est un opérateur linéaire.

Point méthode 17. Ici, on déroule tranquillement le critère pratique. On cherche donc à obtenir une majoration de $\|Tu\|_\infty$ par un terme de la forme $M\|u\|_\infty$.

On a

$$\|Tu\|_\infty \leq \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \right\|_\infty \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \|u\|_\infty$$

Il s'ensuit que T est un opérateur continu et $\|T\| \leq 1$. On peut voir que $\|T\| = 1$ en prenant $u = 1$.

Solution 6.2. [énoncé]

1.

Point méthode 18. Ici, nous devons majorer une intégrale. En pratique, on a 3 résultats pour cela : *Hölder, Minkowski et Jensen.* Ici, on l'apparition du terme $\sqrt{x}$ à droite de l'inégalité laisse penser qu'il va falloir appliquer Hölder.
Reste à trouver les fonctions que nous allons utiliser. Ici, c'est le résultat de la question qui doit nous guider.

L'inégalité de Hölder assure que

$$\left(\int_0^x |f(t)|dt\right)^2 = \left(\int_0^x |f(t)| \times t^{\frac{1}{4}} \times t^{-\frac{1}{4}} dt\right)^2 \leq \int_0^x \sqrt{t}|f(t)|^2 dt \times \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^x \sqrt{t}|f(t)|^2 dt \times 2\sqrt{x} \ .$$

ce qui permet de conclure.

2. Montrons que $\int_{\mathbb{R}_+} |F|^2 dx < +\infty$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f(t)dt \right)^2 \frac{dx}{x^2} \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \int_0^x \sqrt{t} |f(t)|^2 dt dx \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini Tonelli assure que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt &\leq 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{t} |f(t)|^2 \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx dt \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{t} |f(t)|^2 \times \frac{2}{\sqrt{t}} dt \\ &\leq 4 \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.